

Mathematische Modellierung und Computersimulation sozialer Prozesse

Calculus! Ein Werkstattbericht

Peter Karl Fleissner

1 Einführung

Innerhalb der letzten Jahrzehnte haben sich in den Naturwissenschaften mathematische Simulationsmodelle als wichtiges Erkenntnismittel in den Vordergrund geschoben. Zusätzlich zum klassischen Experiment mit der Natur stellen sie heute eine nicht mehr zu vernachlässigende Quelle für Einsichten in komplexe Zusammenhänge dar (gute Beispiele dafür finden sich in der Klimaforschung, der Gravitationsphysik, der Genetik und im Molecular Modelling¹). Dieser Entwicklung haben sich auch die Sozialwissenschaften nicht verschließen können. Im vorliegenden Text werden im Rahmen einer Widerspiegelungstheorie die philosophischen Grundlagen von Simulation als einer jungen Erkenntnismethode diskutiert. Inspiriert durch Herbert Hörz, Rainer Thiel und John Erpenbeck werden die formalen Grundstrukturen von Simulationsmodellen Schritt für Schritt entfaltet und die Leistungsfähigkeit der Modelle zur Widerspiegelung bestimmter Aspekte der Wirklichkeit aufgezeigt (vgl. Erpenbeck 1986; Hörz 1980, 1988, 2008; Thiel 1975). Dabei wird auf den mathematischen Apparat weitgehend verzichtet, um die Allgemeinverständlichkeit des Textes zu erhalten. In einem Exkurs in die Ökonomie werden die Vergegenständlichungsformen einer statischen Volkswirtschaft von Karl Marx und Wassily Leontief miteinander verglichen. Einige Beispiele für dynamische Simulationsmodelle, die aus dem Internet bezogen werden können, runden die Darstellung ab.

2 Simulationsmodelle als vergegenständlichte Nachbildung und Konstruktion

Worum geht es bei der mathematischen Simulation? Aus einer Perspektive der menschlichen Praxis können Simulationsmodelle als Teil eines gesellschaftlichen Veränderungszyklus (siehe Abbildung 1) gesehen werden, der neben dem notwendigen praktischen Handeln wesentliche erkenntnisrelevante Grundfunktionen, Widerspiegelung und Vergegenständlichung, enthält.

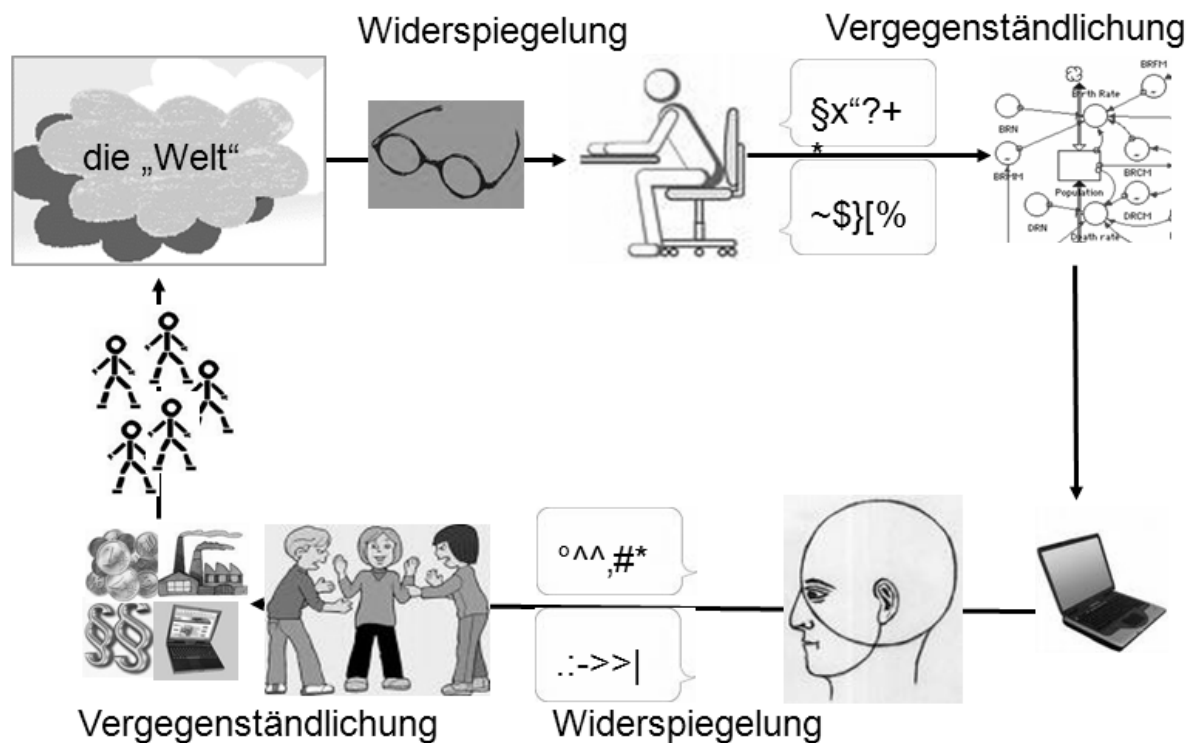
Wir beginnen die Beschreibung der einzelnen Komponenten des Veränderungszyklus mit der *Widerspiegelung*² der Welt im menschlichen Bewusstsein. Die Menschen spiegeln ihre Umwelt zunächst in geistigen Vorgängen wider, indem sie Bilder und Zusammenhänge des Wahrgenommenen, mentale Modelle, im Kopf erzeugen. Dabei handelt es sich um vereinfachte, weniger komplexe und manchmal auch verfälschte Annäherungen an das zugrunde liegende System, das aufgrund der menschlichen Praxis in den Fokus der menschlichen Aufmerksamkeit geraten ist. Diese Widerspiegelungsprodukte sind nie bloß „objektive“ Wiedergabe der Realität (zu der es keinen direkten Zugang gibt), sondern immer gleichzeitig Abbildung und Entwurf, also menschliche Konstruktionen bestimmter Aspekte der Umwelt. Diese Konstruktionen sind aber nicht beliebig. Sie geben bestimmte Eigenschaften der Umwelt korrekt wider, die vom individuellen Bewusstsein als wesentlich erachtet werden. In diese Konstruktionen gehen die bisherigen Erfahrungen der Einzelnen genauso ein wie deren Interessenslagen, Lebensbedingungen, ja auch die genetische

¹ Siehe etwa die Explorationsstudie „Computersimulationen in den Wissenschaften – Neue Instrumente der Wissensproduktion“ von Gabriele Gramelsberger an der FU Berlin; URL: http://www.sciencepolicystudies.de/dok/explorationsstudie_computersimulationen/Computersimulation-4.pdf.

² Im Unterschied zu Todor Pawlow (vgl. Pawlow 1973) behandle ich Widerspiegelung und Vergegenständlichung als zusammengehörig, aber getrennt.

Disposition. Durch Interaktion mit anderen Menschen oder mit der sonstigen Umwelt kann sich die Sicht der Dinge durchaus verändern. Die Konstruktionen sind daher im Zeitverlauf nicht unbedingt invariant, sondern potentiell variabel. Die Widerspiegelungen im Kopf sind dem menschlichen Bewusstsein zugänglich, sie stellen sozusagen die Innensicht auf die Dinge dar (die in diesem Text natürlich nur in einer Außensicht dargestellt werden können, die bei der/beim Leserin/Leser zur Innensicht wird).³

Abbildung 1: Simulation im Veränderungszyklus



Quelle: Eigene Darstellung

Auf den Widerspiegelungsprozess im Kopf folgen im Zuge des Modellbaus verschiedene Stufen von *Vergegenständlichung*. Übliche Formen davon sind die *Versprachlichung*, die *Verschriftlichung* und die *graphische Repräsentanz*. Während die *Versprachlichung* noch den fluiden Charakter des Denkprozesses beibehält, ist die *Verschriftlichung* mit einer Verfestigung von Ideen verbunden, die von anderen Menschen nur in sequentieller Form angeeignet werden können. Aus einer Graphik lässt sich im Idealfall eine Idee mithilfe eines einzigen Blicks aufnehmen. Die besondere Art der *Vergegenständlichung* prägt die besondere Art des Zugangs durch andere Menschen und beeinflusst den Grad des Verständnisses und der Evidenz. Jede *Vergegenständlichung* von Ideen benötigt einen *materiellen Träger* (stofflich, z. B. Luft, Papier, oder energetisch, z. B. ein Computerbildschirm) und eine Reihe von *Symbolen* (z. B. Wörter als Phoneme, Wörter als Buchstabenkombinationen, graphische Grundelemente), die von den anderen Menschen in einer ähnlichen Weise interpretiert werden können wie von den IdeenproduzentInnen intendiert. Die erwähnten Formen von *Vergegenständlichung* sind in unserem Kulturkreis unter der Voraussetzung bestimmter Lernprozesse allgemein verständlich. Auch der Zugang zu den Ideen ist nicht immer

³ Dieser doppelte Zugang liegt auch aller Wissenschaft zugrunde. Wissenschaft vermittelt Objektivität aufgrund subjektiver Gewissheit. Sie bietet eine auf der Innensicht gegründete Außensicht.

voraussetzungslos möglich (man denke z. B. an Bücherpreise oder an Studiengebühren, die an vielen Universitäten bezahlt werden müssen).

Während die oben beschriebenen Vergegenständlichungen von Menschen mit durchschnittlichem Bildungsniveau verstanden werden können, ist die Verständlichkeit der Vergegenständlichungen von Ideen im formalen Apparat von Mathematik und Statistik oder als Simulationsmodell in einer Computersprache nur für SpezialistInnen möglich, die besondere Lernprozesse durchlaufen haben. Die Formelsprachen von Mathematik und Statistik und von Computersprachen sind durch Axiomatisierung und Präzision gekennzeichnet. Um ihre Vorteile nützen zu können, muss aber ein Preis gezahlt werden: Werden Ideen formalisiert, bleiben die jeweiligen Qualitäten, die eine Idee ausmachen, der Formalisierung äußerlich. Der Formelapparat ist blind gegenüber den meisten qualitativen Bestimmungen der Realität.⁴ Die jeweiligen Qualitäten müssen von den Benützern der formalisierten Idee selbst in die Vergegenständlichung hineininterpretiert werden, ja mehr noch, wird einer Variablen einmal eine Qualität zugeschrieben (z. B. Geschwindigkeit), so behält diese Variable diese Qualität immer bei, wie sehr sich auch die quantitative Ausprägung der Variablen ändern möge.

Mathematische Simulationsmodelle stellen im Kontext des Veränderungszyklus eine spezielle Form von Vergegenständlichung dar, indem Teile der theoretischen Widerspiegelung der Welt auf Papier oder in den Computer transferiert werden. Danach kann mit den vergegenständlichten Ideen beinahe so „gearbeitet“ werden, als ob sie „die Wirklichkeit“ selbst wären. Von Bedeutung ist auch, dass die Modelle auf dem Computer in der Regel dynamisch sind, d. h., dass die Veränderungen der Modellkenngrößen in der Zeit beobachtet werden können, oft in anderen zeitlichen Größenordnungen als in der Realität. So können Prozesse der Wirtschaftsentwicklung in der Simulation, die in der Wirklichkeit Jahrzehnte brauchen würden, innerhalb weniger Minuten ablaufen. Umgekehrt lassen sich molekulare Bewegungen⁵, die sich in der Realität im Nanosekundenbereich abspielen, in der Simulation so verlangsamt darstellen, dass sie menschlicher Beobachtung zugänglich werden.

Auf dem Computer können die Eingriffe in die (simulierte) Umwelt verschiedenster Natur sein, sie können politisch, ökonomisch, ökologisch, sozial, rechtlich, künstlerisch, religiös sein und/oder physikalische, chemische, biologische, physiologische oder psychologische Aspekte beinhalten und vereinen.

Bei den Resultaten der Simulation (z. B. Wirtschaftsprognosen) handelt es sich um Möglichkeitsfelder, die unter bestimmten Umständen zur Wirklichkeit werden können. Von einem Standpunkt des passiven Beobachters können die Resultate mit der Realität verglichen werden, was entweder zur Veränderung des Simulationsmodells oder zur Veränderung der Wirklichkeit genutzt werden kann. Die Ergebnisse der Simulationsmodelle müssen erst interpretiert werden, wobei auch hier Widerspiegelungs- und Vergegenständlichungsprozesse dazwischentreten, bevor aus den Möglichkeitsfeldern eine Variante in mehr oder weniger demokratischen Vorgängen ausgewählt und in die Tat umgesetzt werden kann. Damit wäre der Veränderungszyklus durchlaufen und kann wieder von vorne beginnen.

Welche Methoden der Simulation stehen derzeit zur Verfügung und nach welchen Grundzügen funktionieren sie? Die Methoden hängen natürlich immer von den entsprechenden Fragen ab, die mit dem Simulationsmodell bearbeitet oder – wenn es hoch

⁴ Ausnahmen wären qualitative Unterschiede, die dem Formelapparat selbst eigentümlich sind, wie z. B. der Differenzialquotient dx/dt , der aus Manipulationen zweier Variablen (z. B. x mit der Qualität „Ort“ und t mit der Qualität „Zeit“) gebildet werden kann und in diesem Beispiel die Qualität „Geschwindigkeit“ trägt, oder bestimmte Strukturen, die mathematisch beschrieben werden können (vgl. Thiel 1975).

⁵ Ein anschauliches Beispiel gibt:
http://galileoandstein.physics.virginia.edu/more_stuff/Applets/brownian/brownian.html.

kommt – sogar beantwortet werden sollen. Ohne auf die Inhalte der Fragestellungen näher einzugehen, soll hier eine Klassifikation der Vergegenständlichungsarten vorgestellt werden, die ausschließlich auf den Eigenschaften der formalen Strukturen aufbaut, in denen das mentale Modell widergespiegelt wird. Anwendungsbeispiele werden herangezogen, um diese Klassifikation zu illustrieren. Die folgenden Abschnitte sind sozusagen kumulativ zu lesen. Sie steigen von einfachen zu komplexeren Formen auf. Modelle auf der jeweiligen Stufe setzen meist die Strukturen der davorliegenden Stufen voraus.

3 Mathematische Vergegenständlichung 0: Definitionsgleichungen

Die einfachste Form mathematischer Vergegenständlichung bilden Definitionsgleichungen, die in zwei Gruppen unterteilt werden können. Die einfachste Art von Definitionsgleichungen verbindet Größen gleicher Qualität auf quantitativer Basis miteinander (z. B. ist der Umfang eines Dreiecks die Summe der Längen der Seiten), eine etwas komplexere Form sind Definitionsgleichungen, die neue Qualitäten im Modell festlegen (z. B. wird die Fläche eines Rechtecks aus dem Produkt der Längen der Seiten bestimmt). Letztere Form kann komplexere Qualitäten aus einfacheren konstruieren. Die formale Schreibweise ist durch einen definierenden Doppelpunkt charakterisiert:

$$Z := X + Y$$

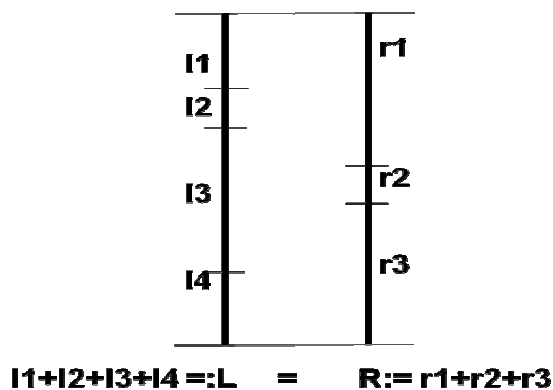
oder

$$Z := X \cdot Y.$$

4 Mathematische Vergegenständlichung 1: Statische Bilanzgleichungen

In den Naturwissenschaften bilden Bilanzgleichungen den Kern der mathematischen Darstellung. Sie sind dadurch gekennzeichnet, dass sie Variablen, die eine bestimmte Qualität besitzen, mit Variablen einer anderen Qualität quantitativ in Zusammenhang bringen. Das Prinzip einer Bilanzgleichung ist von einer Definitionsgleichung wesentlich verschieden (siehe Abbildung 2). Während eine Definitionsgleichung Größen gleicher Qualität auf der quantitativen Ebene (üblicherweise mithilfe der Grundrechnungsarten) zusammenfasst („Ungleiche Quantitäten gleicher Qualitäten verbinden sich zu einer Quantität gleicher Qualität“) oder neue komplexere Qualitäten aus einfachen erzeugt, werden bei einer Bilanzgleichung ungleiche Qualitäten auf der quantitativen Ebene gleichgesetzt („Nur das Ungleiche kann gleichgesetzt werden“).

Abbildung 2: Statische Bilanzgleichung



Quelle: Eigene Darstellung

In der Physik kennen wir z. B. die Erhaltungssätze von Masse, Energie oder Impuls. In der Chemie sind die sogenannten stöchiometrischen Gleichungen⁶ verbreitet. Diese Gleichungen beschreiben qualitativ und quantitativ die Wechselwirkung zwischen chemischen Verbindungen/Elementen. Auf der linken Seite einer solchen Gleichung werden die Ausgangsverbindungen angeführt, auf der rechten Seite die entstehenden Reaktionsprodukte. Anzahl und Art der Atome müssen auf beiden Seiten der Gleichung identisch sein. Wieder gilt, dass qualitativ Verschiedenes quantitativ gleich sein muss.

Analoges gibt es in der Betriebswissenschaft und in den Wirtschaftswissenschaften. Die Einnahmen- und Ausgabenrechnung in einem Betrieb setzt die Einnahmen den Ausgaben unter Hinzuziehung eines Ausgleichspostens (Betriebsüberschuss) gleich. Auf der volkswirtschaftlichen Ebene lassen sich sogar mehrere Bilanzgleichungen finden. Da die Aktivitäten einer Volkswirtschaft in einer bestimmten Zeitperiode nach dem System of National Accounts (SNA) nach der Entstehung, der Verwendung und der Verteilung des Reichtums klassifiziert werden können, muss die Summe aller Umsätze im Wesentlichen gleich sein der Summe aller Ausgaben, die auf der Verwendungsseite getätigt werden, bzw. die Summe aller Kosten und Erträge dem Wert aller Produkte (siehe Abbildung 2).

Exkurs: Marx und Leontief

Marx hat schon im Kapital weitere volkswirtschaftliche Bilanzgleichungen herausgearbeitet: So muss in einem vereinfachten Modell einer kapitalistischen Wirtschaft die Summe aller Konsumgüter wertmäßig gleich sein dem gesamten vorgeschossenen variablen Kapital, und ebenso die Wertsumme aller Produktionsmittel der Summe aller Vormaterialien und Investitionsgüter gleich sein. Sind diese Bilanzgleichungen verletzt, sind krisenhafte Erscheinungen zu erwarten.

Es scheint interessant, die Arbeiten von Marx und Leontief auf der Ebene von mathematischen Strukturen miteinander zu vergleichen (vgl. Leontief 1951; Marx 1969a, 1969b). Beide Autoren haben eine idealisierte Volkswirtschaft nicht nur im Aggregat, sondern gleichzeitig auch nach Sektoren unterteilt beschrieben, wobei sich Marx (zumindest im Band I des „Kapital“) auf den Wertaspekt konzentriert hat, während Leontief den Gebrauchswertaspekt (als **primales** Problem) gleichzeitig mit der Preisproblematik (als duales Problem) behandelt hat.⁷

Als Leontief sein Input-Output-Modell konstruierte, war er sicher von den ersten sowjetischen Wirtschaftsplänen inspiriert. Sein Verdienst war es nicht nur, eine Verflechtungsbilanz der US-Volkswirtschaft mit 42 Sektoren zu erstellen, sondern er konnte seine Methode zum Ausbau der ökonomischen Theorie einsetzen. Besonders erfolgreich war die Idee, die Volkswirtschaft nicht nur durch direkt gewonnene Branchen Kenngrößen wie Brutto-Produktionswert oder Wertschöpfung zu charakterisieren, sondern durch Normierung aller Inputs einer Branche auf die jeweiligen Brutto-Produktionswerte ein quadratisches System von Zahlen ableiten zu können, das als Leontief-Matrix A (auch Matrix der technischen Koeffizienten genannt) in die Wirtschaftswissenschaften eingegangen ist. Damit ist es möglich, auf Branchenebene die eingesetzten Technologien verschiedener Länder zu vergleichen. Multipliziert man die so genannte Leontief-Inverse $(E-A)^{-1}$ mit dem (gegebenen) Mengenvektor der Endnachfrage, lässt sich der Mengenvektor der Brutto-Produktionswerte errechnen.

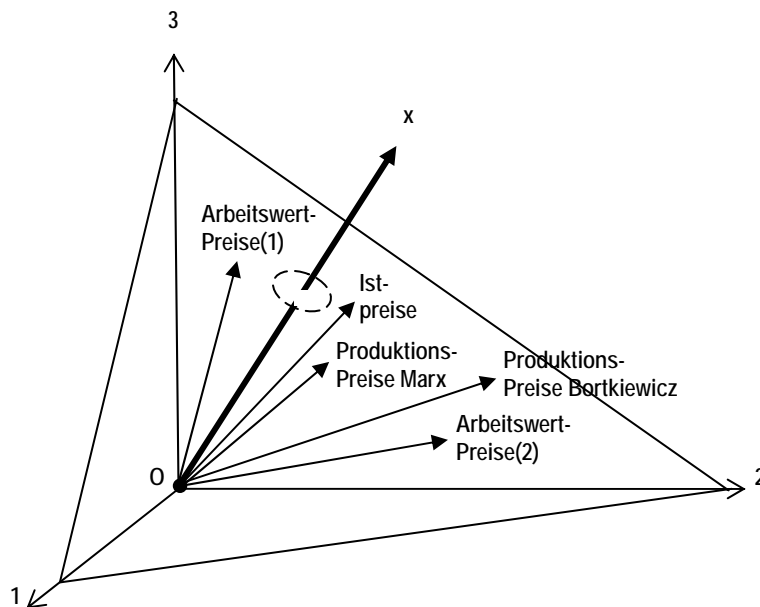
⁶ Vgl. <http://sciencesoft.at/equation/index;jsessionid=oj3wfh0qzy?lang=de>.

⁷ „Primales“ und „duales“ Problem beziehen sich auf die Mengen bzw. die Stückpreise (analog zur Dualität zwischen Welle und Teilchen in der Quantenphysik).

Das Input-Output-Schema von Leontief vereinigt in eleganter Weise die Darstellung einer Volkswirtschaft unter dem Gesichtspunkt von beobachteten Preisen und von umgesetzten Mengen und erlaubt überdies die Berechnung und Darstellung der Marx'schen Arbeitswerte sowie der Produktionspreise (Preise unter der Bedingung ausgeglichener Profitraten). Nach Marx geht die Transformation von Arbeitswerten (in Geldeinheiten) in Produktionspreise unter der Beibehaltung der gesamten im jeweiligen Bewertungssystem ausgedrückten Masse aller Güter vor sich (Wertsomme gleich Produktionspreissomme). Gleichzeitig hat Marx m. E. fälschlich postuliert, dass die Mehrwertmasse (vor der Transformation) gleich der Profitmasse (nach der Transformation) wäre, ein Postulat, das nur unter sehr speziellen Bedingungen erfüllt werden kann und im Allgemeinen im Widerspruch zur ersten Voraussetzung (Wertsomme gleich Produktionspreissomme) steht.

Es scheint interessant, wie die Mathematik auf dieser Basis durch eine Hinwendung zur Geometrie zu einem vertieften Verständnis des Transformationsproblems beitragen kann. Dazu sind einige einfache gedankliche Schritte notwendig: Zunächst stellen wir uns die einzelnen Branchen und die ihnen zugeordneten Indikatoren nicht wie in Abbildung 5 nebeneinander angeordnet vor, sondern denken uns die Indikatoren einer Branche jeweils auf einer eigenen Koordinatenachse dargestellt (siehe Abbildung 3).

Abbildung 3: Die Hyperebene als geometrischer Ort aller möglichen relativen Preise



Quelle: Eigene Darstellung

Anschaulich gelingt uns das natürlich nur mit bis zu drei Wirtschaftszweigen, z. B. Konsumgüter, Produktionsmittel und Luxusgüter oder Landwirtschaft, Industrie und Dienstleistungen. Mathematisch ist aber die Ausdehnung der Anzahl der Branchen auf mehr als drei kein Problem. Nehmen wir zusätzlich an, die Mengen, die in der Wirtschaft produziert werden, wären konstant, nur die Preise könnten sich ändern, dann bedeutet die Marx'sche Annahme „Wertsomme gleich Produktionspreissomme“, dass alle möglichen Preissysteme, die mit den gegebenen Mengenrelationen verträglich sind, auf einer Hyperebene liegen müssen (in Abbildung 3 ist die Hyperebene für den Fall $n = 3$ als Dreieck angedeutet). Dies gilt sowohl für den Vektor der (wie auch immer berechneten) Arbeitswerte, für den Vektor der Produktionspreise und für den Vektor der Ist-Preise, die wir tatsächlich beobachten. Das Transformationsproblem besteht unter diesem Gesichtspunkt in einer Verschiebung der Spitze des Vektors der Arbeitswerte in der Hyperebene in einen Vektor der

Produktionspreise. Nun hat Marx eine Lösung vorgelegt, die die Bewertung der Outputs zu Preisen vornimmt, die den einzelnen Sektoren ausgeglichene Profitraten zuweist, die Inputs werden aber weiterhin zu Arbeitswerten berechnet (vgl. Marx 1979b). Diese für das Gleichgewichtsdenken der Ökonomenzunft provokante Diskrepanz kritisierte vor allem Ladislaus von Bortkiewicz in konstruktiver Weise, indem er eine alternative Lösung für die Produktionspreise vorlegte, die in der linearen Algebra als Eigenvektorproblem bekannt ist (vgl. Bortkiewicz 1906/07). Es lässt sich aber zeigen, dass die Marxsche Berechnungsmethode iterativ auf das jeweilige Ergebnis angewandt gegen die von Bortkiewicz-Lösung konvergiert. Alle Zwischenergebnisse liegen natürlich wieder in der Hyperebene. Und überdies gilt, dass man von einem beliebigen Preisvektor ausgehen kann: Die Marxsche Methode führt von beliebigen Ausgangs-Preisvektoren iterativ zur von Bortkiewicz-Lösung.

Mit gewissem Recht konnte deshalb Paul Samuelson sagen: „Betrachte zwei alternative widersprüchliche Systeme. Schreib das eine hin. Zur Transformation nimm einen Radiergummi und radiere es aus. Schreib dann stattdessen das andere hin. Voilà! Damit ist der Transformationsalgorithmus beendet“ (Samuelson 1971, p. 400).

Insofern ist das System der Produktionspreise ein besonderes idealtypisches Preissystem, das ohne Bezugnahme auf irgendwelche Arbeitszeiten quantitativ bestimmt werden kann, da die Festlegung ausgeglichener Profitraten zur eindeutigen Berechnung relativer Preise hinreicht. Aber obwohl Samuelson mathematisch Recht hat, vernachlässigt er den inneren Zusammenhang der Preise mit der menschlichen Arbeit. Es geschieht in der Evolution häufig, dass ein älteres Regime (z. B. ein idealtypisches System kleiner WarenproduzentInnen) durch ein neues (idealtypisch kapitalistisches System mit gleichen Profitraten in allen Zweigen, die sich durch vollkommene Konkurrenz mittels Kapitalwanderungen ergeben) ersetzt wird, und dass die ältere Schicht im neuen System nicht erhalten bleibt. Wenn die Arbeitswerttheorie Richtigkeit beanspruchen soll, genügt aber die plausible Annahme, dass sich das kapitalistische System aus einem anderen, einfacheren Regime (logisch – und vielleicht auch historisch – gemeint) herausgebildet hat, von dem sich allerdings an der Oberfläche der empirischen Daten keine Spuren mehr finden lassen. Die Preisstruktur eines älteren Regimes kann aber durch mathematische Transformationen idealtypisch erschlossen werden. Wie eine Zeitmaschine erlaubt es die Mathematik, hinter die Oberfläche des Konkurrenzkapitalismus zu sehen. Wie ich weiter unten zeigen werde, ist die Rekonstruktion der logischen Vergangenheit nicht notwendigerweise eindeutig. Es wären verschiedene Modelle der logischen Vergangenheit möglich, die alle durch Transformationen in Richtung ausgeglichener Profitraten gegen das gleiche Ergebnis der Produktionspreise konvergieren.

Der polemische Vorschlag von Samuelson erscheint aus diesem Blickwinkel als Aufruf zur Reduktion der ökonomischen Theorie auf abstrakte Zusammenhänge. Durch diese Reduktion wird jegliche historische Entwicklung eines Wirtschaftssystems ausgeblendet und der status quo zur Richtschnur für die Verewigung herrschender Verhältnisse.

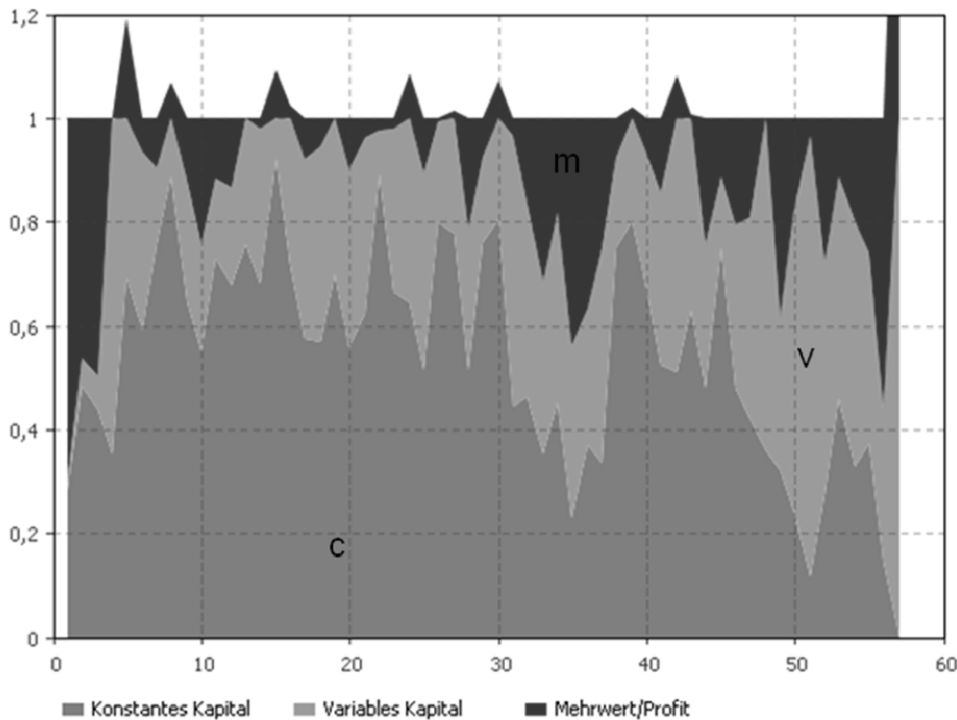
Folgt man dem Vorschlag Samuelsons nicht, sondern versucht, auf theoretischer Basis spezielle idealtypische Vorläuferstrukturen für die Produktionspreise zu identifizieren, ist die erste Wahl die Arbeitswerttheorie, die Marx im ersten Band des „Kapital“ beschreibt (vgl. Marx 1969a). Die Matrizenrechnung erlaubt es, bei Kenntnis der Leontief-Inversen (die mit Hilfe einer zeilennormierten Verflechtungsbilanz konstruiert wurde) und der Arbeitszeiten die Arbeitswerte w zu berechnen. Wird die lebendige Arbeit n als Zeilenvektor dargestellt, ergeben sich die Arbeitswerte w wie folgt:

$$w = n (E - A)^{-1}.$$

Abbildung 4 zeigt das Resultat dieser Rechnung für eine konkrete Input-Output-Tafel für Österreich 2003 mit 57 Wirtschaftszweigen⁸ in Form der Wertstruktur aufgeteilt nach konstantem Kapital c , variablem Kapital v und Mehrwert m :

$$w = c + v + m.$$

Abbildung 4: Struktur der Arbeitswerte (alle Sektoren wertbildend; c – konstantes Kapital, v – variables Kapital, m – Mehrwert), Österreich 2003: 57 Sektoren (in Prozent)



Quelle: Eigene Darstellung

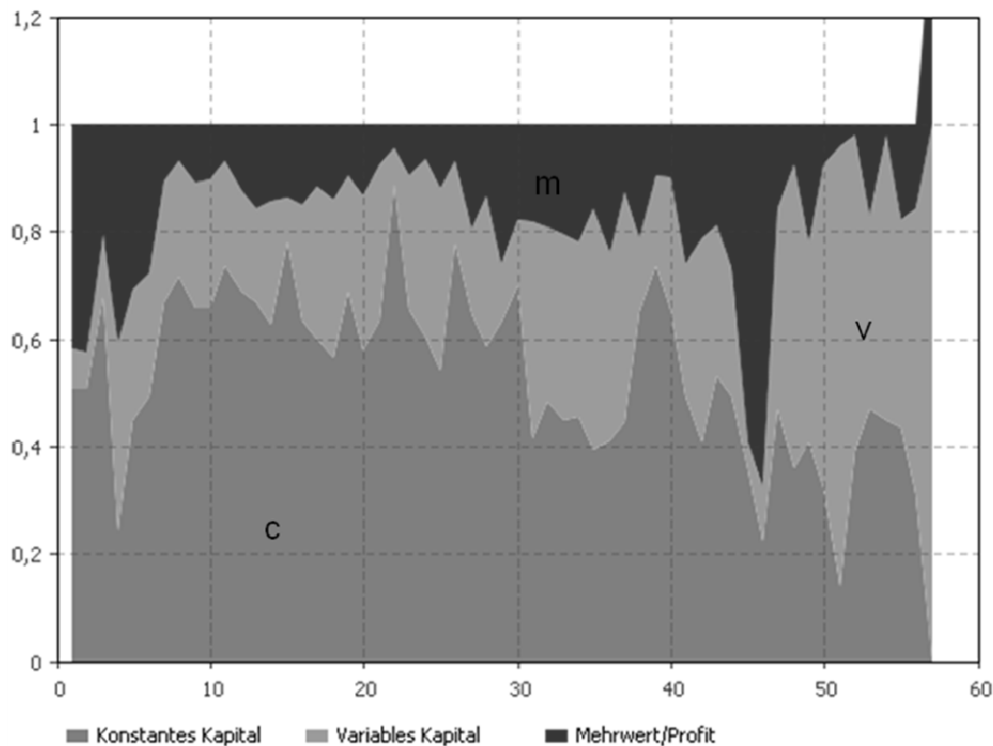
Dieses Bild lässt sich direkt mit der Preisstruktur nach Wirtschaftszweigen zu Ist-Preisen vergleichen (siehe Abbildung 5).

Vergleicht man nicht die Wert- bzw. Preiszusammensetzung, sondern die Wertmasse (bzw. Preismasse) je Wirtschaftszweig, lässt sich die Übereinstimmung zwischen diesen beiden Bewertungssystemen durch eine Kenngröße, den Korrelationskoeffizienten r , berechnen. Ist der als linear angenommene Zusammenhang perfekt, besitzt $r = 1$, sind die zu vergleichenden Werte gegenläufig, ist $r = -1$. Ist der Zusammenhang rein zufällig, ist $r = 0$. Für Österreich 2003 ergibt sich ein Korrelationskoeffizient r von 0.883⁹ zwischen den errechneten Arbeitswerten und den beobachteten Preisen. Obwohl ein statistisch signifikanter Zusammenhang besteht, finden sich gegenüber den Ist-Preisen auf der Wertstrukturebene einige merkwürdige Abweichungen: wie Abbildung 4 zeigt, sind die Mehrwertanteile in relativ vielen Branchen negativ, obwohl negativer Mehrwert (hier als Betriebsüberschuss ausgedrückt) in der Wirklichkeit (siehe Abbildung 5) nur in einer einzigen Branche (Private Haushalte) auftritt.

⁸ Vgl. http://www.statistik.at/web_de/statistiken/volkswirtschaftliche_gesamtrechnungen/input-output-statistik/index.html.

⁹ Unter der Annahme normalverteilter Fehler lässt sich die Hypothese (bloß zufälliger Zusammenhang zwischen den beiden Bewertungen) statistisch testen. Die Teststatistik für den Fisher'schen F-Test ergibt für den Wert $F(1,55) = 194.65$ und damit mit hoher Wahrscheinlichkeit eine Ablehnung der Hypothese.

Abbildung 5: Struktur der Brutto-Produktionswerte (Ist-Preise; c – konstantes Kapital, v – variables Kapital, m – Mehrwert,) Österreich 2003: 57 Sektoren (in Prozent)



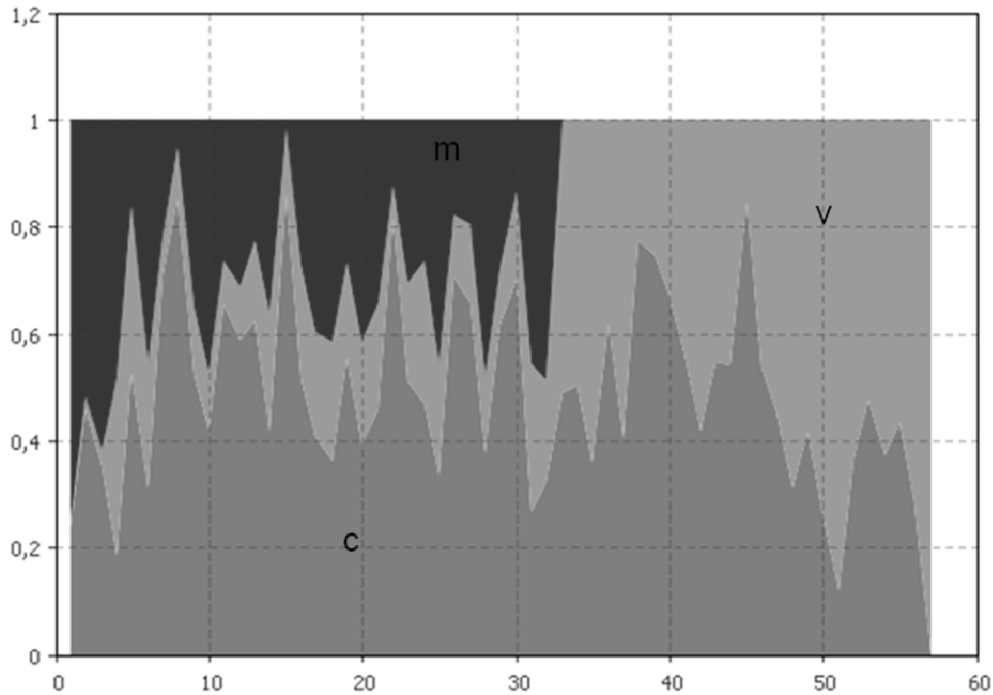
Quelle: Eigene Darstellung

Eine andere Methode der Wertberechnung geht nur von jenen Wirtschaftszweigen aus, die positive Beiträge zum Mehrprodukt leisten können. Wenn alle anderen Zweige (meist Dienstleistungssektoren) in einer Input-Output-Tafel zu ihren Reproduktionskosten (unabhängig von der dort geleisteten Arbeitszeit) bewertet werden, sind sie aus eigener Finanzkraft nicht in der Lage, zu investieren. Sollten sie dennoch investieren, müssten sie die Investitionsgüter von jenen Zweigen beziehen, die sie tatsächlich herstellen. Dann aber könnten die Zweige, die das Mehrprodukt herstellen, nicht mehr das ganze von ihnen erzeugte Mehrprodukt investieren. Es tritt in diesem Fall eine Verletzung des so genannten Äquivalententausches auf. Die Wertstruktur wird verzerrt. Tauschakte verlaufen dann so, dass eine Seite Waren oder Geld anbietet, die nicht die gleiche Arbeitszeit verkörpern wie die Waren oder das Geld des Tauschpartners. Dies ist in der kapitalistischen Praxis eher die Regel als die Ausnahme. Aber für den Aufbau einer widerspruchsfreien Theorie, die auf dem gerechten Tausch beruht, wäre eine solche Ungereimtheit tödlich.

Wie ließe sich ein System aufbauen, in dem ausschließlich äquivalenter Tausch zugelassen ist und an dem auch Sektoren teilnehmen, die nichts zum Mehrprodukt beitragen? Die Lösung ist relativ einfach: Jene Sektoren, die nichts zum Mehrprodukt beitragen, werden unter der Annahme in die Verflechtungsmatrix eingefügt, dass deren Arbeit keinen Mehrwert produziert. Unter diesen Bedingungen können Arbeitswerte berechnet werden, die den Dienstleistungssektoren zwar keinen Mehrwert ermöglichen, aber deren Output zu Reproduktionskosten bewertet wäre (siehe Abbildung 6).

Die Korrelation der Arbeitswerte mit den Ist-Preisen ist mit einem r von 0.802 etwas niedriger als im Falle der Annahme, alle Sektoren wären wertbildend, aber m. E. bedeutet dies kein Problem. Nach der Marxschen Theorie wären ja in einer kapitalistischen Wirtschaft die Produktionspreise die Drehpunkte der beobachtbaren Preise und nicht die wie immer berechneten Arbeitswerte.

Abbildung 6: Struktur der Arbeitswerte (Dienste nicht wertbildend, ungleiche Mehrwertraten; c – konstantes Kapital, v – variables Kapital, m – Mehrwert), Österreich 2003: 57 Sektoren (in Prozent)



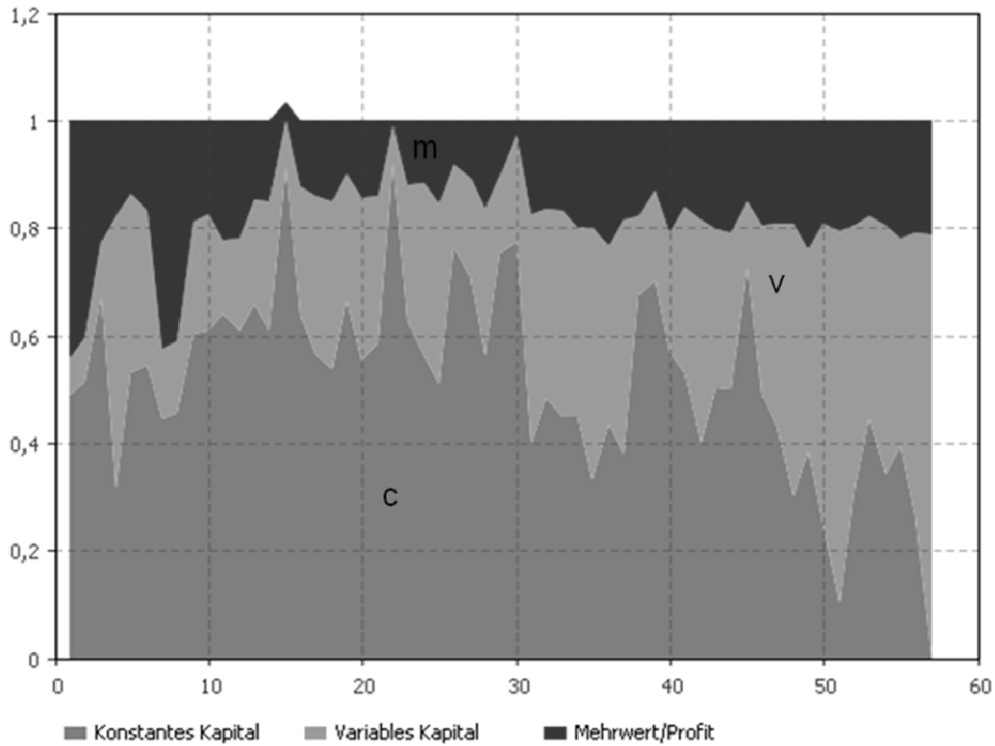
Quelle: Eigene Darstellung

Geht man von Arbeitswerten aus, die ausschließlich in den Wirtschaftszweigen der materiellen Produktion erzeugt werden, wobei die Dienstleistungen als nicht-wertbildend und zu Reproduktionskosten bewertet werden, und wendet die Marxsche Methode der Transformation in Richtung ausgeglichener Profitraten an, erhält man einen Korrelationskoeffizienten, der mit $r = 0.901$ schon höher ist als jedes der beiden Wertrechnungsergebnisse (vgl. Fleissner 2008). Die entsprechende Wertzusammensetzung zeigt Abbildung 7.

Weitere Iterationen ergeben bis zur Iteration 4 ($r = 0.9537$) immer größere Korrelationskoeffizienten zwischen den iterativ ermittelten Produktionspreisen und den Ist-Preisen. Mit jeder Iteration fällt der Korrelationskoeffizient interessanterweise wieder, wenn auch nur noch schwach, und konvergiert von oben gegen $r = 0.95235$ (vgl. die entsprechende Wertzusammensetzung in Abbildung 8).

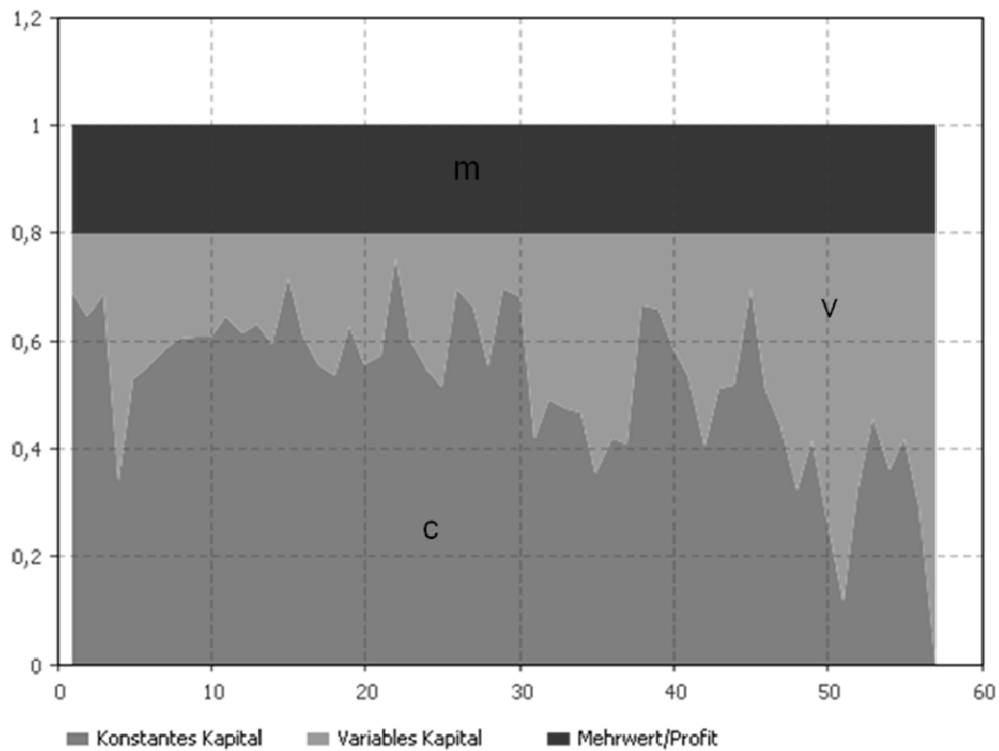
Dieses Ergebnis ist in Übereinstimmung mit den Überlegungen von Emmanuel Farjoun und Moshe Machover, die schon vor einem Vierteljahrhundert aufgrund thermodynamischer Methoden zum Schluss kamen, dass die beobachteten Profitraten nicht gleich sein sollten, sondern eher permanent ungleich sein müssten. Sie haben auch den Typ der Wahrscheinlichkeitsverteilung angegeben (vgl. Farjoun/Machover 1983).

Abbildung 7: Produktionspreise: Marxsche Methode, eine Iteration (c – konstantes Kapital, v – variables Kapital, m – Mehrwert), Österreich 2003: 57 Sektoren (in Prozent)



Quelle: Eigene Darstellung

Abbildung 8: Produktionspreise: Methode nach Bortkiewicz (c – konstantes Kapital, v – variables Kapital, m – Mehrwert); Österreich 2003: 57 Sektoren (in Prozent)



Quelle: Eigene Darstellung

Marx hat das Transformationsproblem auf einer ziemlich abstrakten Ebene unter Konstanz der sozio-technischen Bedingungen einer Wirtschaft untersucht, d. h. die technischen Koeffizienten bleiben ebenso konstant wie die Konsumkoeffizienten (Konsum an Gebrauchswerten einer bestimmten Branche pro Outputeinheit). Was sich verändert, sind die relativen Preise, die unter der Annahme, dass die Märkte geräumt werden, zu Veränderungen bei den Gewinnen und Investitionen führen müssen.

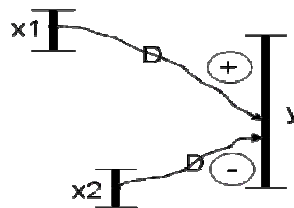
Der hohe Grad der Abstraktion des Transformationsproblems lässt sich ein wenig reduzieren, wenn man annimmt, dass sich z. B. der Konsum bei veränderten Preisen ebenfalls ändern wird. Nimmt man eine Transformation unter diesen Bedingungen vor, gibt es nicht mehr bloß eine einzige Lösung für den Produktionspreisvektor, sondern deren zwei, mit zwei verschiedenen (aber ausgeglichene) Profitraten und einem dazugehörigen Konsumniveau, das bei niedriger Durchschnittsprofitrate hoch ist und umgekehrt – umgekehrt (vgl. Fleissner 2008).¹⁰

5 Mathematische Vergegenständlichung 2: Verhaltensgleichungen

Die dritte Methode der Vergegenständlichung, die sich großer Verbreitung in allen Wissenschaften erfreut, ist die Verhaltensgleichung. Sie geht zunächst von einer Teilung von Variablen in Inputs und Outputs aus, die oft auch als exogene oder endogene Variablen bezeichnet werden (siehe Abbildung 9). Sie ist darauf ausgerichtet anzugeben, welche Werte y bei bestimmten Werten von x_1 , x_2 usw. annehmen wird. Die Variablen können dabei völlig unterschiedliche Qualitäten ausdrücken. Verhaltensgleichungen kommen in allen quantitativ arbeitenden Wissenschaften und in der Technik vor.

Sie bringen oft Ergebnisse zum Ausdruck, die experimentell gewonnen wurden, z. B. Kennlinien von elektronischen Bauteilen, Zusammenhänge zwischen Kraftausübung und Verformung einer metallischen Feder, Ausgaben für Konsum in einer Volkswirtschaft als Funktion von Einkommen und Preisniveau etc. Anwendungen finden sich in der Psychologie, Soziologie und der Volkswirtschaft genauso wie in Physik, Chemie und Biologie.

Abbildung 9: Verhaltensgleichungen



Quelle: Eigene Darstellung

Um dem dahinterliegenden Prinzip des Zusammenhanges näherzukommen, werden auf die experimentell gewonnenen Messdaten, die immer zu einem gewissen Grad fehlerbehaftet sind, häufig Fehlerausgleichsmethoden angewandt. Ein gutes Beispiel dafür ist die Regressionsrechnung und ihre Weiterentwicklung im Rahmen der Ökonometrie. Hier kommt zum ersten Mal der Zufall in die Widerspiegelung herein, allerdings eher in der Form eines Fehlers, einer unangenehmen Größe, die möglichst eliminiert werden müsse. Tatsächlich besteht Regressionsrechnung darin, die quadrierte Summe aller Fehler zu minimieren und sich so möglichst stark an den „reinen“ und systematischen, nicht fehlerbehafteten Zusammenhang der Ideenwelt anzunähern.

¹⁰ Vgl. http://peter.fleissner.org/petergre/documents/Transformations_Problem_Beijing2.pdf.

Auf dieser Grundlage hat sich nach dem Zweiten Weltkrieg¹¹ eine eigene Disziplin, die Ökonometrie, etabliert, die angibt, wie Modelle ökonomischer Systeme konstruiert und die speziellen Parameter der darin vorkommenden Gleichungen auf empirischem Wege bestimmt werden können. Die Ökonometrie ist auf weite Strecken eine Disziplin der mathematischen Statistik, erlaubt aber auch, spezielle Fragestellungen aus dem Bereich der Wirtschaftstheorie praktisch anzuwenden. Ökonometrische Modelle wurden und werden zur Prognose von Wirtschaftsdaten und zur Bestimmung der Effekte wirtschaftspolitischer Entscheidungen verwendet (vgl. als ein Beispiel unter vielen Bruckmann/Fleissner 1989). Ökonometrische Modelle können aus einem simultanen Gleichungssystem bestehen, das die Werte der endogenen Variablen unter Vorgabe der exogenen bestimmt. Die Art des Zusammenhangs zwischen Input und Output kann gleichzeitig sein, es kann zwischen Input und Output aber auch eine zeitliche Verzögerung (in Abbildung 9 als Delay D gekennzeichnet) geben.

Eine einzelne Gleichung hat häufig die folgende Gestalt

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n + u$$

y verkörpert die endogene Variable, x_1, x_2, \dots, x_n die exogenen Variablen und u eine Zufallsvariable. Die Parameter a_0, a_1, a_2, \dots werden so bestimmt, dass die Fehlerquadratensumme über alle vorliegenden Beobachtungen minimiert wird. Sind einige der x_i verzögerte endogene Variable, kann durch iterative Lösung der dadurch entstehenden Differenzgleichung bereits eine Dynamik beschrieben werden.

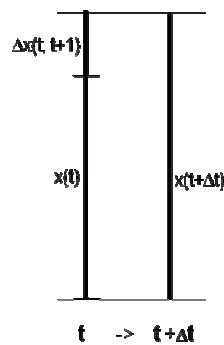
In der Praxis, z. B. bei der Erstellung von Wirtschaftsprognosen, werden die Fehler normalerweise weggelassen, so dass nur der dem ideellen Modell folgende Teil der Vergegenständlichung in die Berechnung eingeht und die Prognose dadurch einen Anschein der Präzision erhält, der aber – wie die Geschichte der ökonomischen Fehlprognosen leidvoll zeigt – nicht gerechtfertigt ist.

6 Mathematische Vergegenständlichung 3: Dynamische Bilanzgleichungen

Ein weiterer Schritt in der mathematischen Vergegenständlichung ist durch dynamische Bilanzgleichungen gegeben, die sich von den statischen Bilanzgleichungen dadurch unterscheiden, dass der einzige qualitative Unterschied zwischen linker und rechter Seite der Gleichung in ihrer Lage in der Zeit besteht (siehe Abbildung 10). Die dynamische Bilanzgleichung hat vielfältige Anwendungen in allen Wissenschaften, z. B. zunächst in Differenzgleichungen in der Physik, die den Übergang vom Zeitpunkt t nach $(t+\Delta t)$ beschreiben, als Lagerhaltungsgleichung, als dynamische Bevölkerungsbilanz oder als dynamische Buchhaltungssysteme. Lässt man Δt gegen Null gehen, lässt sich aus dem Differenzenquotienten der Differenzialquotient bilden, der in der mathematischen Beschreibung der Dynamik mechanischer oder elektronischer Systeme eine zentrale Rolle spielt.

¹¹ Jan Tinbergen and Ragnar Frisch erhielten im Jahr 1969 als erste den Ökonomie-Nobelpreis für die Anwendung dynamischer Modelle auf ökonomische Prozesse. Ihre Vorarbeiten dazu reichen bis in die 1920er Jahre zurück.

Abbildung 10: Dynamische Bilanzgleichung

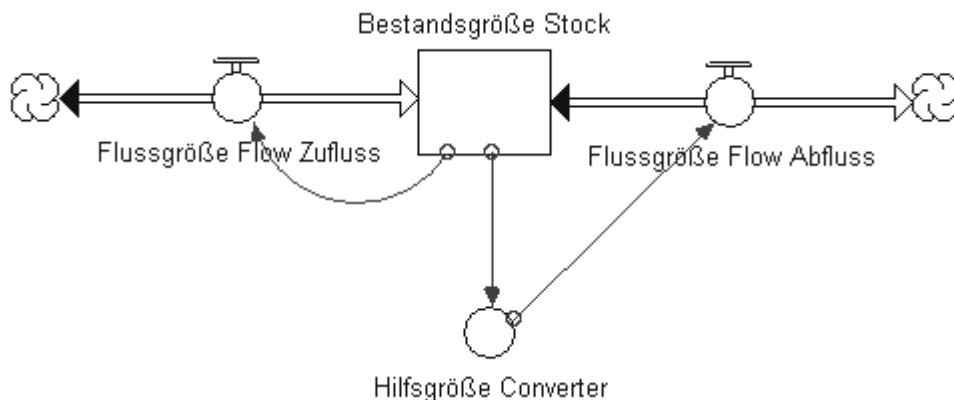


Quelle: Eigene Darstellung

Die dynamische Bilanzgleichung erlaubt es, mit Bestandsgrößen und Flussgrößen zu arbeiten, die in Simulationsprogrammen (wie z. B. in DYNAMO, STELLA oder VENSIM) weit verbreitet sind. Die graphische Vergegenständlichung von Bestands- und Flussgrößen eines STELLA-Modells auf dem Bildschirm eines Computers zeigt Abbildung 11. Man kommt in den systemdynamischen Modellen, wie sie von Jay Forrester in den USA entwickelt worden sind, mit vier graphischen Elementen aus: STOCK (Bestandsgröße), FLOW (Flussgröße), AUXILIARY (Hilfsgröße, später auch Converter genannt) und ACTION CONNECTOR (verbindet zwei Variablen miteinander, kann eine Verhaltensgleichung oder Definitionsgleichung erzeugen). Das gezeigte System in Abbildung 11 aus einer Bestands- und zwei Flussgrößen ist nichts anderes als die graphische Vergegenständlichung einer dynamischen Bilanzgleichung, wobei allerdings Zugänge und Abgänge getrennt dargestellt werden.

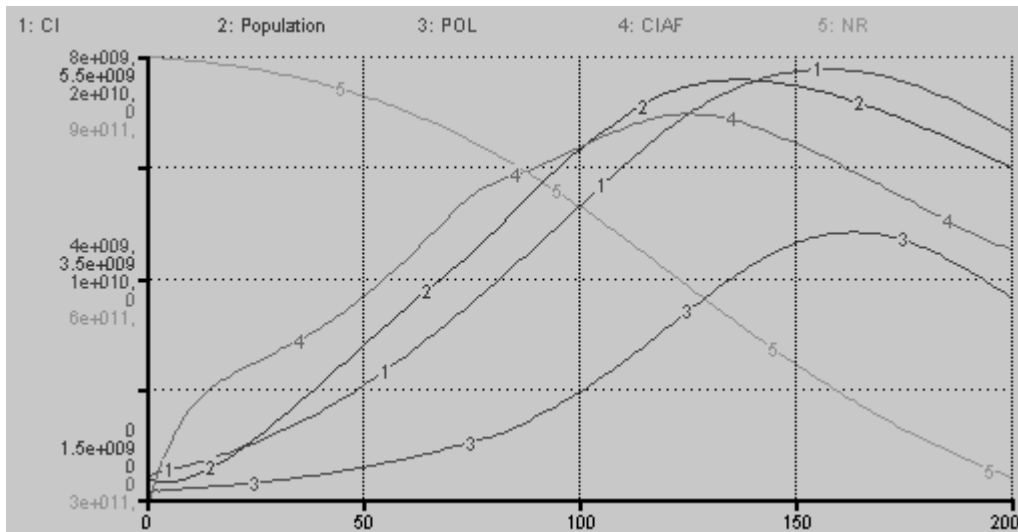
Durch Einfügen von Hilfsgrößen, die durch Pfeile verbunden sind, und weitere Bestandsgrößen-Flussgrößen-Kombinationen lassen sich komplexe Rückkopplungsstrukturen aufbauen, die unvorhergesehene Verhaltensweisen der endogenen Variablen des Simulationsmodells erzeugen. Abbildung 12 zeigt das Ergebnis eines Durchlaufes von fünf Variablen (Kapitalinvestitionen, Bevölkerung, Umweltverschmutzung, Agrarinvestitionen und natürliche Ressourcen, die laufend schrumpfen) des Forresterschen Weltmodells (vgl. Forrester 1971) über 200 Jahre (1900 bis 2100).

Abbildung 11: Grundelemente von Forresters Systemdynamik



Quelle: Eigene Darstellung nach dem Softwarepaket STELLA

Abbildung 12: Weltmodell von Forrester: Teilergebnisse



Quelle: Eigene Darstellung

7 Mathematische Vergegenständlichung 4: Der Zufall wird wesentlich

Systemdynamische Modelle eignen sich sehr gut zur Beschreibung dynamischer Vorgänge, seien sie linear oder nichtlinear, ihr Einsatz ist aber in den meisten Fällen auf die Darstellung von Makrozusammenhängen beschränkt. Ein Beispiel soll den Unterschied erläutern: Während in der Makroökonomie die Konsumfunktion eine wichtige Rolle spielt, die den Zusammenhang zwischen dem gesamten Lohneinkommen, dem Preisniveau (etwa dem Verbraucherpreisindex) und dem nachgefragten Konsum beschreibt und die Systemdynamik genau diesen Zusammenhang auf einem sehr hoch aggregierten Beschreibungsniveau abzubilden erlaubt, bleiben die einzelnen Entscheidungen der Konsumenten außer Betracht, auch ihre individuelle Lage bezüglich der Höhe ihres Einkommens, oder ihre Neigung, wie rasch und in welcher Höhe sie bei einem erhöhten Einkommen Konsumgüter kaufen werden etc. Die Gründe für den hohen Aggregationsgrad lagen in der Zeit nach dem Zweiten Weltkrieg in den Beschränkungen der Rechentechnik und dem hohen Preis von schnellen Computern, die meist nur in großen Institutionen verfügbar waren. Der Siegeszug des Personal Computers hat demgegenüber neue Möglichkeiten geschaffen. Rechenzeit und Speicherplatz wurden immer billiger, die Arbeit wurde über das Internet dezentralisiert, sodass es heute relativ einfach ist, bei der Vergegenständlichung eines Problems nicht nur Aggregate zu berücksichtigen, sondern einzelne Entscheidungseinheiten, Institutionen oder Individuen direkt abzubilden. Diese, je nach Anwendungsfeld Mikrosimulationen oder Agent Based Modells genannten Simulationsverfahren haben gegenüber Systemdynamik-Modellen einen erhöhten Datenbedarf und einen vermehrten Rechenaufwand. Letzterer fällt aber wegen der verbesserten Hard- und Software und ihrer Verbilligung kaum ins Gewicht, ersterer wird durch die Verfügbarkeit elektronischer Datenbanken technisch bewältigbar.

Agentenbasierte Modelle sind insofern besonders interessant, da sie mindestens zwei verschiedene Ebenen enthalten, die betrachtet werden können, die Ebene der Individuen (Mikroebene) und die Aggregatenebene (Makroebene). Wie in der Quantenmechanik kann bei einer großen Zahl von Individuen von der präzisen Zuordnung von Parameterwerten zu bestimmten Individuen abgesehen werden. Es genügt, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auszuwählen (die der beobachteten Verteilung möglichst nahe kommt) und aus ihr für die individuellen Parameter eine Stichprobe zu ziehen. Auf diese Weise erhält der Zufall eine neue und wesentliche Funktion, und dies in doppelter Weise:

- (a) Die Zufallsauswahl der Parameter in jedem Simulationsdurchlauf führt dazu, dass jeder Durchlauf unterschiedliche Ergebnisse aufweist. Dadurch ist eine punktgenaue Prognose nicht mehr möglich. Wiederholt man die Simulation viele Male, lassen sich die Verteilungen der Ergebnisse in eindrücklicher Weise bestimmen. Damit sind aber die Möglichkeiten für agentenbasierte Modelle nicht ausgeschöpft.
- (b) Die Wahrscheinlichkeitsfunktion selbst können einer systematischen Veränderung unterworfen werden, wodurch sich auf dem Computer qualitativ anderes und neues Verhalten erzeugen lässt, das nicht prognostiziert werden kann (außer durch den Simulationsprozess selbst).

Anstelle weiterer theoretischer Überlegungen sollen praktische Beispiele angeführt und kurz beschrieben werden, die direkt aus dem Internet heruntergeladen werden können.

Das erste Beispiel, das Fall (a) illustrieren soll, beschreibt die eine Menschenmenge, die unter verschiedenen Bedingungen einen Raum verlassen möchte.¹² Wird der Raum in Ruhe (Durchschnittsgeschwindigkeit = 1m/s) und ohne Panik¹³ verlassen, kann dies durch gute Koordination effizient vor sich gehen. Gerät die Menge in Panik (Durchschnittsgeschwindigkeit = 5m/s), entsteht Bogen- und Klumpenbildung am einzigen Ausgang. Die Individuen können den Raum nur irregulär und ineffizient verlassen.¹⁴ Berücksichtigt man den Druck, den die Individuen aufeinander ausüben (ab 1.600N/m gibt es Verletzte im Modell), blockieren die Verletzten, die sich nicht mehr bewegen, zusätzlich den Ausgang.¹⁵ Interessant ist, dass bei Vorhandensein einer Säule in Ausgangsnähe das Verletzungsrisiko nicht steigt, wie man erwarten sollte, sondern geringer wird, da die Säule Teile des Drucks auffängt.¹⁶

Ein Beispiel¹⁷ für Fall (b) zeigt zwei interagierende Individuen, einen Blinden und einen Lahmen, die eine gemeinsame Umwelt besitzen und miteinander in Kontakt treten können. Der Blinde hat die Aufgabe, eine Barriere, deren Länge wechselt, korrekt zu überspringen, kann die Barriere aber nicht sehen. Er kann jedoch Töne unterschiedlicher Höhe hören, die aus der Trompete des Lahmen kommen, der die Barriere sehen kann. Zunächst sind die jeweiligen Reize und Reaktionen der beiden Akteure völlig unkoordiniert. Durch praktische Erfahrungen lernen aber der Blinde und der Lahme, die Wahrscheinlichkeiten zwischen den Reizen und Reaktionen in Richtung auf größeren Erfolg zu verändern. Der Prozess konvergiert gegen eine degenerierte Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion, die für einen bestimmten Reiz mit Wahrscheinlichkeit 1 eine bestimmte Reaktion festlegt. Bei jedem neuen Simulationsdurchlauf kann sich aber ein anderes Resultat einstellen. Die Bedeutung der Tonhöhen, die sich schließlich ergeben, können von den UserInnen verstanden werden (Bitte Lautsprecher einschalten!). Damit sind die wesentlichen Züge eines emergenten Prozesses nachgebildet, der zu einer neuen Qualität der Interaktion der Individuen führt.

Literatur

Bortkiewicz, L. von (1906/7): Wertrechnung und Preisrechnung im Marxschen System. In: Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik, T. 1: Jg. XXIII, S. 1-50; T. 2: Jg. XXV, S. 10-51; T. 3: Jg. XXV, S. 445-488

¹² Mein Dank gilt den ungarischen KollegInnen, die dieses Modell ins Internet gestellt haben.

¹³ http://angel.elte.hu/~panic/pedsim/sim/No_Panic.html.

¹⁴ <http://angel.elte.hu/~panic/pedsim/sim/Panic.html>.

¹⁵ http://angel.elte.hu/~panic/pedsim/sim/Stampede_N0200_Fc1600.html.

¹⁶ http://angel.elte.hu/~panic/pedsim/sim/Column_5.html.

¹⁷ <http://igw.tuwien.ac.at/peterf/springer/default.htm>, eine genauere Beschreibung findet sich unter <http://peter.fleissner.org/petergre/documents/techpolitik.html>.

- Bruckmann, G.; Fleissner, P. (Hg.) (1989): Am Steuerrad der Wirtschaft. Ein ökonometrisch-sozialkybernetisches Modell für Österreich. Wien
- Erpenbeck, J. (1986): Das Ganze denken. Zur Dialektik menschlicher Bewußtseinsstrukturen und -prozesse. Berlin
- Farjoun, E.; Machover, M. (1983): Laws of Chaos. A Probabilistic Approach to Political Economy. London
- Fleissner, P. (2007): The Marxian Transformation Problem Revisited. In: Nature, Society, and Thought, vol. 20, no. 3-4, pp. 383-387
- Fleissner, P. (2008): Marx begegnet Leontief. Neuere Gesichtspunkte der Arbeitswertlehre. In: Wirtschaft und Gesellschaft, Jg. 34, H. 3, S. 361-396
- Forrester, J. (1971): World Dynamics. Cambridge
- Hörz, H. (1980): Zufall. Eine philosophische Untersuchung. Berlin
- Hörz, H. (1988): Wissenschaft als Prozess. Berlin
- Hörz, H. (2008): Determinismus und Stochastik. Ist die Kluft zwischen den zwei Wissenschaftskulturen zu überwinden? In: LIFIS ONLINE [23.10.08]. – URL: http://www.leibniz-institut.de/archiv/hoerz_23_10_08.pdf
- Leontief, W (1951): Input-Output Economics. In: Scientific American, October, pp. 15-21 (Reprint in: Leontief, W.: Input-Output Economics. 2d ed. New York 1986, pp. 3-18)
- Marx, K. (1979a): Das Kapital. Bd. I. In: Marx, K.; Engels, F.: Werke. Bd. 23. Berlin
- Marx, K. (1979b): Das Kapital. Bd. III. In: Marx, K.; Engels, F.: Werke. Bd. 25. Berlin
- Pawlow, T. (1973): Die Widerspiegelungstheorie. Berlin
- Samuelson, P. (1971): Understanding the Marxian Notion of Exploitation. A Summary of the So-Called Transformation Problem between Marxian Values and Competitive Prices. In: Journal of Economic Literature, no. 2, pp. 399-431
- Thiel, R. (1975): Mathematik – Sprache – Dialektik. Berlin