ABCDarium Oktober 2010

Peter Fleissner

Mathematik – ein Schimpfwort

Schon seit einiger Zeit überlege ich, ob ich es mir erlauben darf, in einer kommunistischen Zeitung über mein Lieblingsthema zu schreiben, über Mathematik und mathematische Simulation. Wird Sie. liebe Leserin, lieber Leser, dieses Thema interessieren? Die meisten Menschen schalten sofort ab, wenn sie etwas von Mathematik und Statistik hören. Sie sagen höchstens: „Mit Statistiken kann man gut lügen", oder „Mathematik ist einfach langweilig". Marx selbst hat in diesem Chor mitgesungen: „Diese verfluchten falschen Rechnungen soll der Teufel holen." Dies war aber nicht sein letztes Wort, denn er setzte dreisprachig hinzu: „Aber never mind. Commençons de nouveau." (MEW 42, S. 291) „Macht nix. Fangen wir neu an."

Umso mehr freute es mich, in einer Zeitung aus El Salvador neben einem Beitrag über Österreich mit dem poetischen Titel „Die Sezession und die goldene Götterdämmerung des Österreichischen Imperiums 1887 – 1904" (siehe http://peter.fleissner.org/Transform/INDE_DIGITAL_09-09-10.pdf, Seite10) auch einen Artikel zu den „Mathematischen Manuskripten" von Karl Marx zu lesen (Seite 9). Nicht viele Menschen wissen von dieser Arbeit, noch weniger haben sie gelesen. Marx hat sie im Jahr 1881 geschrieben, zwei Jahre vor seinem Tod, schon kränkelnd, publiziert wurde sie erst ein halbes Jahrhundert später, 1933, in Moskau. In Deutschland wurde sie zum ersten Mal im Jahr 1974 gedruckt.

Marx als Mathematiker?

Engels sagte bei Marx' Begräbnis am Londoner Highgate Friedhof: „… auf jedem einzelnen Gebiet, das Marx der Untersuchung unterwarf, und dieser Gebiete waren sehr viele und keines hat er bloß flüchtig berührt – auf jedem, ***selbst auf dem der Mathematik***, hat er selbständige Entdeckungen gemacht." (MEW 19, S. 336) Welche Entdeckungen waren dies? Um seine Leistung würdigen zu können, muss ich weiter ausholen.

Die Mathematik ist im Sinn der materialistischen Widerspiegelungstheorie eine Abbildung bestimmter Eigenschaften unserer Welt, aber immer auch eine menschliche Konstruktion. Wie alle Bereiche unseres Daseins besitzt sie qualitative und quantitative Eigenschaften. Im Alltagsverständnis besteht Mathematik vor allem aus den Grundrechnungsarten, aus Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren, und dem Kleinen und Großen Ein mal Eins. Vielleicht könne Sie sich noch an Schlussrechnungen erinnern, wie zum Beispiel: Ein Arbeiter braucht zum Abtransport einer Tonne Schotter 5 Stunden. Wie lange brauchen 3 Arbeiter? Schon hier wird klar, dass die Variablen, die in dem Beispiel vorkommen (Mengen an Schotter, Anzahl an Stunden, Zahl der Arbeiter) eine qualitative (Schotter, Stunde, Arbeiter) und eine quantitative Eigenschaft (1, 5 oder 3) besitzen. Während die qualitative Eigenschaft einer Variablen immer gleich bleibt (Schotter kann sich nicht Arbeiter verwandeln), ist die quantitative Eigenschaft, der Zahlenwert, veränderlich. Schon diese einfache Tatsache hat schwerwiegende Folgen für die Art der Widerspiegelung der Welt. Habe ich einmal eine Variable definiert, kann sie ihre Qualität nicht mehr ändern. Unsere Wirklichkeit ist aber viel reichhaltiger: „Wie es ist, so bleibt es nicht". Wasser verwandelt sich in Eis oder in Dampf, neue Erscheinungen treten auf, die es vorher nicht gegeben hat. Die Welt befindet sich in einem dauernden evolutionären Prozess der Veränderung. Die Mathematik sollte, wenn sie eine gute Konstruktion und eine passende Abbildung darstellt, möglichst alle diese Eigenschaften der Welt symbolisch widergeben, ohne sich in Widersprüche zu verwickeln. Das tat sie aber um 1650 noch weniger als heute.

Der Differentialquotient: Der Schlüssel zur Bewegung

Erst zwei Mathematikern, die in die Geschichte eingegangen sind, der Deutsche Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) und der Brite Sir Isaac Newton (1643 – 1727) ist es mit dem so genannten **Differentialquotienten** gelungen, unabhängig voneinander[1] eine mathematische Darstellung von Bewegungsabläufen zu entwickeln, die noch heute die Grundlage für die meisten physikalischen, chemischen, aber auch ökonomischen Berechnungen darstellt. Der Differentialquotient ist eine dialektische Konstruktion einer neuen Qualität, die es in der Mathematik vorher nicht gab. In der Physik lässt sich der Differentialquotient als „Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt" deuten. Er trägt die Momente von Ruhe und Bewegung dialektisch aufgehoben in sich, und verdichtet sie zur punktuellen Geschwindigkeit.

Was ist das Problem, um das es beim Differentialquotienten geht? Hätten Sie im 16. Jahrhundert die Bewegung eines Pferdewagens beschrieben, hätten Sie wahrscheinlich gesagt: Am Montag um 6 Uhr früh war die Postkutsche in Wien, um 16 Uhr ist sie in Wiener Neustadt angekommen. Damit haben Sie die Lage der Kutsche zu zwei Zeitpunkten im Raum bestimmt. Die Frage nach der Durchschnittsgeschwindigkeit der Kutsche lässt sich beantworten, indem Sie die Wegdifferenz durch die Zeitdifferenz dividieren. Aber wie drücken Sie die Geschwindigkeit der Kutsche zu einem einzelnen Zeitpunkt mathematisch aus, wo sie keine Zeitdifferenzen mehr bilden können, da sowohl die Ortsdifferenz als auch die Zeitdifferenz auf Null schrumpft? Dies führt zu einer Division von Null durch Null, einer sogenannten „unbestimmten Form", deren Wert zunächst unbestimmt und nicht notwendiger Weise Null sein muss.

In der Mathematik spricht man bis heute kryptisch und verwirrend bei diesen Differenzen von einer Rechnung mit „unendlich kleinen Größen". Marx hat diese Vorgangsweise als Mystizismus bezeichnet. Da die „mystischen" Berechnungen mit Hilfe „unendlich kleiner Größen" aber zum gleichen Ergebnis führten wie die Marxsche Methode (und auch anderer), konnte Marx dem mathematischen Hokuspokus mit „unendlich kleinen Größen" gleichzeitig eine rationale, argumentierbare Grundlage geben. Fairerweise muss hinzugefügt werden, dass die moderne Mathematik seit den 1960er Jahren mit der von Abraham Robinson entwickelten „Nichtstandardanalysis" ebenfalls eine korrekte Begründung für die Rechnung mit „unendlich kleinen Größen" vorweisen kann, die auf Leibniz'schen Ideen fußt.

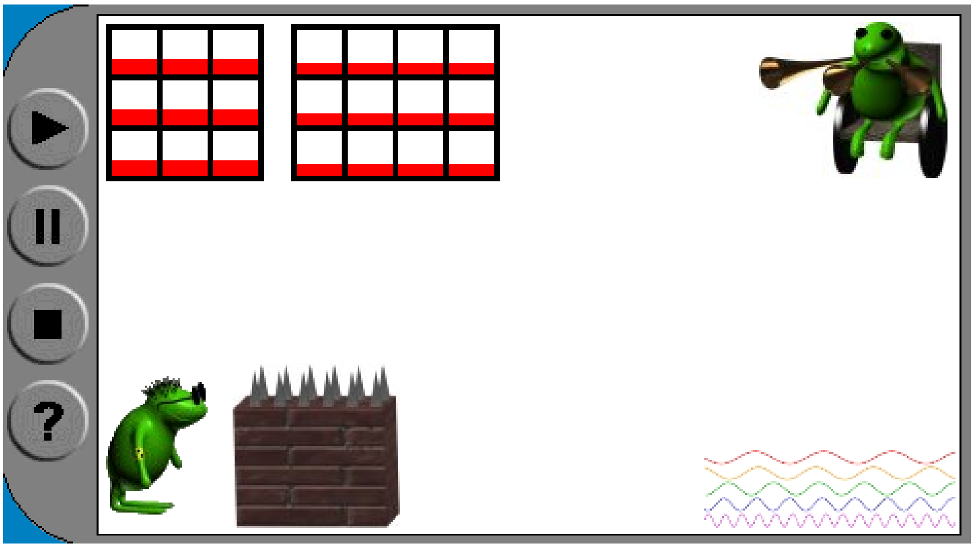
Informationsverarbeitende Maschinerie: Mathematik in Technik

Die Entwicklung der Mathematik erhielt einen neuen Aufschwung durch die Informationsverarbeitende Maschinerie (IVM), die umgekehrt erst durch Mathematik möglich wurde: Die IVM entstand zu Beginn der Wissenschaftlich-Technischen Revolution um die Mitte des 20. Jahrhunderts und erlaubte es, weitere Arbeits(teil)tätigkeiten der Menschen auf Maschinen auszulagern. Dazu zählt das Wahrnehmen der Umgebung durch Sensoren (wie z.B. durch ein Mikrofon, einen Thermofühler, eine Fotozelle), das logische Entscheiden (durch einen Mikrochip mit Programm) und das Einwirken auf die Umgebung durch einen Aktor (z.B. durch ein Relais, einen Schalter, einen Lautsprecher, einen Bildschirm). Die IVM stellt nach der Arbeitsmaschine der Industriellen Revolution des 18. und 19. Jahrhunderts die neue Leittechnologie dar, die unser technisches System aus der Phase der Mechanisierung in die Phase der Automatisierung katapultiert, wodurch die Produktivität der Arbeit vervielfacht werden kann. Dabei wird die traditionelle Arbeitsmaschine durch die IVM gesteuert und überwacht. Gleichzeitig erhielt die Mathematik durch die IVM eine äußerst wirksame Vergegenständlichungsmöglichkeit in Form von Computerprogrammen. Vom

[1] In der Folge führte diese unterschiedliche Urheberschaft zu einem erbitterten Prioritätsstreit zwischen den Mathematikern der beiden Länder.

Taschenrechner bis zum Großrechenzentrum, vom Navigationsgerät bis zum Mobiltelefon, vom Laptop bis zum iPad reichen die Anwendungsmöglichkeiten für mathematische und statistische Methoden. Das Internet bietet überdies die passende Infrastruktur zur weltweiten Kommunikation und Kooperation der elektronischen Geräte und der damit verknüpften Menschen.

Der blinde Springer: Sprachentwicklung am Computer



Durch die IVM boten sich auch für die angewandte Mathematik neue Möglichkeiten. Es lassen sich nicht nur äußerst komplexe und umfangreiche Problemstellungen behandeln, sondern am Computer kann auch Neues produziert werden, das die verächtliche Meinung mancher Menschen, der Computer wäre bloß ein Blechtrottel, Lügen straft. Das Stichwort heißt Simulation, was nichts anderes bedeutet, als dass sich am Computer Ähnliches abspielt wie in der Realität.

Damit Sie selbst erfahren können, wovon hier die Rede ist, brauchen Sie nur in den Browser Ihres Computers, der mit dem Internet verbunden sein muss, die Internetadresse http://igw.tuwien.ac.at/peterf/springer/default.htm eingeben. Sie werden nach etwa einer Minute auf der linken Seite Ihres Bildschirms die Bedienknöpfe eines Tonbandgeräts sehen, die Sie mit der Maus anklicken können. Bitte schalten Sie auch den Lautsprecher Ihres Computers ein. Sie sehen im Zentrum des Bildschirms zwei simulierte Wesen, links einen Blinden mit dunklen Brillen, rechts oben einen Lahmen, der in einem Rollstuhl sitzt und eine Trompete in der Hand hält. Vor dem Blinden befindet sich eine Barriere, die der Blinde durch Springen überwinden soll. Das Problem dabei ist, dass die Mauer ihre Länge zufällig ändert. Hat der Blinde Pech und springt zu kurz, landet er auf der mit Stacheln bewehrten Barriere, springt er zu weit, landet er in einem (nicht dargestellten) See. Gleichzeitig beobachtet der Lahme die Situation. Er kann dem Blinden durch einen Ton aus seiner Trompete zu verstehen geben, wie lange die Mauer jeweils ist. Hätten die beiden bereits vorher ausgemacht, welcher Ton aus der Trompete welche Länge der Barriere bedeutet, wäre alles einfach. Der Blinde würde jeweils korrekt informiert werden, wie die Lage in diesem Moment ist, und könnte sich dann immer für die passende Sprungweite entscheiden. Leider ist die Lage nicht so. Die beiden müssen erst, und der Springer besonders schmerzlich, einen Lernprozess durchmachen, und schrittweise eine gemeinsame „Sprache“ entwickeln, die den Tönen aus der Trompete eine bestimmte Bedeutung verleiht, die vom Springer verstanden wird. Wenn Sie den Startknopf mit der Maus anklicken, können Sie diesen Lernprozess selbst verfolgen. Dieser Lernprozess ist ein Lernprozess mit günstigem Ausgang für die beiden Figuren. Leider funktioniert die Kooperation in der Wirklichkeit nicht immer so gut wie in der virtuellen Welt.

Wenn Sie genau beobachten und zuhören, können Sie schließlich sogar die Bedeutung der Töne verstehen, mit denen sich die beiden simulierten Figuren verständigen. Sie sind somit Zeuge der Entstehung einer primitiven Sprache auf dem Computer geworden.

Was ist der Witz der Sache? Zwischen dem Beginn der Simulation und ihrem Ende ist eine qualitative Veränderung des Verhältnisses zwischen den beiden Kunstwesen aufgetreten. Waren am Anfang Tonhöhe und Sprungweite in einem rein zufälligen Verhältnis, haben sich die Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Töne und die nötige Sprungweite immer mehr erhöht (für andere verringert), bis schließlich ein eindeutiger Zusammenhang hergestellt wurde, der dem Blinden erlaubt, über die Barriere zu springen genauso als ob er selbst sehen könnte. Noch eine interessante Eigenschaft besitzt diese Simulation. Da am Anfang der Zufall regiert, können Sie nicht vorhersagen, welche Sprache sich entwickeln wird. Indem Sie die Simulation neu starten, können Sie sich selbst davon überzeugen, dass sich nicht immer die gleiche Sprache einstellt. Der Prozess ist im Detail nicht vorhersagbar. Damit haben Sie ein Beispiel erlebt, das zeigt, dass virtuelle Wesen durch mathematische Methoden und Computertechnologie in den Besitz von Eigenschaften kommen können, die bisher nur Menschen oder Tieren vorbehalten waren. Tatsächlich konnte ein Student der damaligen Hochschule für Bodenkultur dieses Grundverhalten der Simulation bei einer bestimmten Singvogelart nachweisen. Ein Vogel singt ganz zufällige Tonfolgen in den Schwarm hinein. Mit etwas Glück Antwortet ein möglicher Geschlechtspartner mit ähnlichen Lauten, die in der Folge aufeinander abgestimmt werden. Die romantische Folge dieses Partnersuchprozesses: Das Pärchen bleibt ein Vogelleben lang beieinander.

Wir können gespannt sein, welche neuen Fähigkeiten die Mathematik den zukünftigen Technologien verleihen wird. Die Lernfähigkeit von Maschinen auf ein vorgegebenes Ziel hin und selbstständiges Entscheiden werden sicher darunter sein.

Ohne Differentialquotienten keine Naturwissenschaften…

Nun kann man fragen, warum sich Marx gerade in seinen letzten Jahren mit dem Differentialquotienten beschäftigte. Mehrere Gründe können dafür den Ausschlag gegeben haben. Der erste könnte die zentrale Rolle sein, die der Differentialquotient in der stürmischen Entwicklung der Naturwissenschaften spielte. Man sollte auf den ersten Blick glauben, dass die Mathematik zeitlos wäre und auf ewigen Grundsätzen beruhe. Nichts wäre falscher als eine solche Ansicht. Die Mathematik hat genauso wie der Kapitalismus oder die ganze Welt eine Geschichte. Sie hat sich mit dem Differentialquotienten auf einen neues Entwicklungsniveau begeben. Für Marx, der die Wissenschaften für eine revolutionäre Kraft gehalten hat, die den Lauf der Geschichte in neue Bahnen leiten können, könnte hier ein Ansatzpunkt für das Studium bestimmter Erscheinungen der Mathematik gelegen haben.

….auch keine Gesellschaftswissenschaft?

Aber es gäbe noch einen zweiten Grund, der mit seiner Analyse des Kapitals zusammenhängt. Sicher haben Sie schon von der Profitrate gehört und der These von Marx, dass diese im Lauf des kapitalistischen Wirtschaftsprozesses tendenziell fallen würde, weil die Maschinen immer mehr lebendige Arbeit würden. Denken wir den Prozess zu Ende und stellen wir uns hypothetisch und utopisch eine vollautomatische Wirtschaft vor, in der keine Arbeitskräfte mehr benötigt werden. Berechnen wir nun die Profitrate, sehen wir eine formale Verwandtschaft zwischen der Division von Null durch Null. Marx war der Auffassung, dass der

Wert, den die Waren besitzen, ausschließlich durch die gesellschaftlich notwendige Arbeitszeit bestimmt wird. Die Werte zeigen sich (nach einigen Vermittlungsschritten, die ich hier weglasse) schließlich in Form von Preisen, die wir tatsächlich beobachten können. Wenn keine Arbeitskräfte mehr vorhanden sind, werden die Werte aller Waren Null. Und nun kommt die Schwierigkeit in der Argumentation, die einige Marx-Exegeten mit der Profitrate haben. Die Profitrate π ist ja als Quotient von Mehrwert M durch das vorgeschossene konstante Kapital C und das variable Kapital V bestimmt, also in einer Formel mit dem griechischen Buchstaben π (sprich: Pi):

$$\pi = M/(C+V).$$

Nimmt man nun an, dass alle Bestandteile der Formel ein Vielfaches der gesamten geleisteten Arbeitszeit N betragen, also das konstante Kapital gleich a.N und das variable Kapital b.N, wobei a und b das jeweilige Vielfache der geleisteten Arbeitszeit ausdrücken. Der Mehrwert ist ebenfalls ein Vielfaches der geleisteten Arbeit, die sich als (1-b).N ausdrücken lässt. a wird größer als Eins sein, b kleiner als Eins, aber größer als Null. Welchen Wert würde die Profitrate bei Vollautomatisierung (N = 0) annehmen? Sie werden es schon erraten haben: der Wert ist zunächst unbestimmt, nämlich Null durch Null, $\pi = 0/0$, genau wie in dem Ausdruck, den wir schon kennen. Bleibt der Mehrwert M = (1-b).N in einem konstanten Verhältnis zur Arbeitszeit und nimmt die Arbeitszeit durch Automatisierung immer mehr ab, würde die Profitrate gegen Null gehen, was viele Zusammenbruchstheoretiker dem Kapitalismus voraussagten und damit sein Ende gekommen sahen. Betrachtet man die empirischen Befunde, so ist aber keine eindeutige Tendenz eines Falls der Profitrate erkennbar. Im Gegenteil, die letzten Jahrzehnte vor der Krise bis in die Krise hinein waren eher mit steigenden Profitraten verbunden (siehe http://hussonet.free.fr/debaproe.pdf).

Kein automatischer Zusammenbruch des Kapitalismus

Nun wenden wir die Marxsche Methode der Berechnung des Differentialquotienten auf die Profitrate unter der Bedingung der (beinahe) Vollautomatisierung an. Es werde nur noch eine sehr geringe Zahl von Arbeitsstunden, ΔN - sprich Delta N - geleistet. Wir setzen ΔN in die Formel für die Profitrate ein. Schon beim Bruchrechnen haben wir gelernt, dass man Zähler und Nenner durch den gleichen Wert kürzen kann, wenn dieser nicht Null ist. Also ergibt sich daraus eine Profitrate, die größer als Null und auf keinen Fall Null ist (siehe Kasten).

$$\pi(\Delta N) = M/(C+V) = (1-b).\ \Delta N \ / \ (a.\ \Delta N + b.\ \Delta N) = = (1-b).\ \Delta N \ / \ [(a + b).\ \Delta N]$$

$$\pi(\Delta N) = M/(C+V) = (1-b).\ \cancel{\Delta N} \ / \ [(a + b).\ \cancel{\Delta N}] = (1-b) \ / \ (a + b).$$

Es könnte sein, dass Marx mit den Mathematischen Manuskripten nach einer Antwort auf die Frage nach dem Endwert der Profitrate bei Vollautomatisierung gesucht hat. Obwohl diese Frage hypothetisch scheint, kann sie die Gültigkeit einer Theorie testen. Auch wenn es nicht so war: Das richtige Ergebnis hätten wir mit seiner Hilfe gefunden. Was lernen wir daraus? Die Profitratenentwicklung wird nicht automatisch den Untergang des Kapitalismus herbeiführen, das müssen nach wie vor engagierte Menschen tun.