Überlegungen zu Geld, Kredit und Wirtschaftswachstum

Peter Fleissner (Version 31.12.2007)

Zusammenfassung

Dieses paper wurde durch einen Informations- und Diskussionsabend am 7. Dezember 2007 im Österreichischen Wirtschafts- und Gewerbemuseum in Wien inspiriert, an dem Hans Christoph Binswanger sein Buch "Die Wachstumsspirale – Geld, Energie und Imagination in der Dynamik des Marktprozesses" (Metropolis 2006) in einem Vortrag über "Wachstum, Geld und Nachhaltigkeit" vorstellte, der von Dr. Raimund Dietz und Dr. Fred Luks kommentiert wurde (Moderation: Fritz Hinterberger). Das paper hat die Aufgabe, mir im Rahmen der Marx'schen Arbeitswerttheorie und seiner Reproduktionsschemata meine eigene Position zu Geld und Kredit in einer wachsenden Wirtschaft klar zu machen. Mit den Ergebnissen des papers ist es möglich, bei Vorhandensein eines Bankensektors bestimmter Größe und gegebener Matrix A und C der technischen bzw. der Konsumkoeffizienten das mögliche gleichgewichtige Wirtschaftswachstum und den Zinssatz zu berechnen. Die vielen Quellen, die dabei eingeflossen sind, zitiere ich hier nicht im Einzelnen.

Einleitung

Wie schon Rosa Luxemburg aufmerksam gemacht hat, benötigt die Marx'sche erweiterte kapitalistische Reproduktion für ihr Funktionieren "eine Erweiterung der zahlungsfähigen Nachfrage nach Waren". Sie fragt sich zu Recht: "Wo rührt nun die ständig wachsende Nachfrage her, die der fortschreitenden Erweiterung der Produktion im Marxschen Schema zugrunde liegt?"[1]. Sie sucht die Lösung in der Existenz von "'dritten Personen': : Beamte, liberale Berufe, Geistliche usw.". (a.a.O. S. 297), im "nichtkapitalistischen Milieu" (a.a.O. S. 314) des "inneren und auswärtigen Absatzmarktes" (a.a.O. S. 315).

Wie ich weiter unten zeigen werde, benötigt nicht nur die erweiterte, sondern bereits die einfache Reproduktion "zahlungsfähige Nachfrage", d.h. Nachfrage, die mit Geld bezahlt wird. Aber woher kommt das Geld? Meiner Interpretation nach sind es Kredite, die sowohl die einfache Reproduktion als auch ein Wirtschaftswachstum, das auf einer Ausweitung der Produktionsmittel und Arbeitskräfte basiert, und die damit verbundenen

1 Luxemburg, Rosa (1913). Die Akkumulation des Kapitals. Nachdruck in: Gesammelte Werke (1990), Band 5, Berlin: Dietz Verlag. S. 7-411, S. 102

Tauschbeziehungen von Geld gegen Ware (G – W) und umgekehrt (W – G) ermöglichen. Kredite können durch die Institution der Bank vergeben werden. Sie hat das Recht, finanzielle Mittel entweder auf der Basis der Geldschöpfung (eventuell, aber nicht notwendigerweise gegen eine materielle Sicherstellung von stillliegendem Vermögen) oder durch Weitergabe von vorhandenen Einlagen an die Kreditnehmer (die tatsächlich zum großen Teil als Sichtguthaben bei der Bank verbleiben oder bald wieder in den Bankensektor zurückkehren) gegen ein Kompensation – Zinszahlungen – zu verleihen oder umgekehrt Einlagen der Kunden anzunehmen, für die die Bank Zinsen zahlt. Aus der Zinsdifferenz finanziert sich die Bank. Ich versuche im Folgenden, diese Überlegungen in das Schema der erweiterten Reproduktion a la Marx einzubauen, das ich später zu einem Leontief'schen Input-Output Schema verallgemeinere.

Zunächst das Grundschema mit zwei Abteilungen (MEW Bd 24, Das Kapital, Bd 2, S. 505ff)
$c1 + v1 + m1 = w1$ (Abteilung 1, Investitionsgüterabteilung)
$c2 + v2 + m2 = w2$ (Abteilung 2, Konsumgüterabteilung)

Zum Unterschied von Marx, der an manchen Stellen Geld als materielles Produkt (Goldware) aufgefasst und folgerichtig einen Sektor der Geldproduktion angenommen hat, baue ich an dieser Stelle explizit einen Bankensektor ein, der Einlagen annimmt und Kredite vergibt, beides gegen Zinsen. Der Bankensektor muss aus den Zahlungen für die Kreditzinsen (die aus dem Mehrwert m1 und m2 stammen) finanziert werden.

Geht man davon aus, dass in der Praxis von den Banken das konstante fixe Kapital cf als Sicherheit für einen Kredit herangezogen werden kann, könnte ziemlich sicher ein hinreichend hoher Kredit gegeben werden, wie er für den Ankauf von Produktions- und Konsummittel nötig wäre:

$$cf1 >= c1, cf2 >= c2$$

Die folgenden Überlegungen gehen von den vereinfachenden Annahme der Periodizität und Synchronizität aus, dass die Umschlagzeit des Kapitals für beide Abteilungen 1 Jahr (oder irgend eine andere konstante Zeitperiode) betragen soll. Der Kauf und Verkauf soll in der Fantasie kurz nach Beginn eines Vermarktungs- und Produktionszyklus (etwa einem Kalenderjahr) erfolgen, die Produktion kurz vor seinem Ende. Wir betrachten den dynamischen Prozess der erweiterten Reproduktion zum ersten Jänner, also zu jenem Zeitpunkt, zu dem die Produktion des vorherigen Zyklus in beiden Sektoren abgeschlossen ist , d.h. zu dem bei den Unternehmern alle Werte in Waren (als Sachkapital) vorliegen. Der (potentielle) Wert der Waren soll der enthaltenen Arbeitszeit (w1 bzw. w2) entsprechen. Dem Kauf der Waren liegen entsprechende Geldflüsse zugrunde, die erst ab dem Moment der abgeschlossenen Produktion verfolgt werden. Es wird angenommen, dass die entsprechenden Geldmengen für die vorher nötigen Transaktionen vorhanden waren.

Die Methode, die ich hier verwende, geht davon aus, dass die erweiterte Reproduktion vom Moment der vollendeten Produktion au solange verfolgt wird, bis wieder der gleiche Zustand eingetreten ist (alles Kapital liegt wieder in Warenform vor), allerdings auf erweiterter Stufenleiter (W – G – W – W'). Es wird also ein ganzer Produktionszyklus durchlaufen. Dabei gibt es zwei komplett trennbare Prozesse:

- Der erste Prozess (W – G – W) geht von zwei Abteilungen aus (implizite Vereinfachung: je Abteilung gibt es nur je eine kapitalistische Unternehmung). Zu Beginn liegt das Kapital der Kapitalisten in Gebrauchswertsform vor, deren Tauschwert w1 bzw. w2 ist. Das erste W symbolisiert dabei die Gebrauchswerte von Produktionsmitteln bzw. Konsummitteln nach erfolgter Produktion in beiden Abteilungen, die durch Käufe und Verkäufe gegen Geld über den Markt so alloziert werden, dass sie den Produktionserfordernissen der laufenden Periode entsprechen, also dem physisch vorgeschossenen Kapital (zweites W) vom gleichen Wert w1 + w2 wie vorher, nur anderen Eigentümern zugeordnet und anders zusammengesetzt.
- Im zweiten Prozess (W – W') werden in den beiden Abteilungen aus Waren im Wert w1 bzw. w2 ohne Intervention des Marktes (d.h. ohne Geldvermittlung) mehr Waren im Wert von w1' bzw. w2' (also Waren W') hergestellt.

Der Einfachheit halber nehme ich an, dass die Unternehmen zu Beginn des ersten Prozesses keine Geldmittel zur Verfügung haben (Wir könnten auch eine bestimmte Geldmengenverteilung annehmen, welche die Kredithöhe verringern würde, was aber am Prinzip der Kreditvergabe nichts ändern würde).

Im Folgenden sollen beide Prozesse im Detail betrachtet werden.

Zu Beginn des ersten Prozesses besitzt Kapitalist 1 also ausschließlich Produktionsmittel vom Wert w1, die in seinem Unternehmen hergestellt wurden, und Kapitalist 2 sitzt vor einem Berg von Konsummitteln im Wert von w2, die in seinem Betrieb erzeugt wurden. Nun kann die Verwandlung von Ware in Geld so vor sich gehen, dass die Kapitalisten an die jeweils andere Abteilung Produktionsmittel bzw. Konsummittel verkaufen. Die Käufer benötigen dazu Geld. Kapitalist 1, der für seine Arbeiter Konsummittel benötigt, gibt Geld in der Höhe v1' = [v1 (1 + g)] für Konsummittel aus, wobei g die Wachstumsrate darstellen soll, die erwartet wird. Er kauft daher im Wert gv1 Konsumgüter vom Kapitalisten 2, und vom eigenen Sektor c1' = [c1 (1 + g)]. Durch die vereinfachende Annahme, dass die einzelnen Abteilungen nur aus je einer Unternehmung bestehen, wird die Höhe des notwendigen Kredits vom Bankensektor auf ein Minimum beschränkt (da der Erwerb von Produktionsmitteln für Abteilung 1 in Naturalform erfolgt, also kein Geld nötig ist). Diese Einschränkung wird später wieder aufzugeben sein.

Abteilung 1 hat daher zu Beginn der Produktionsperiode Produktionsmittel im Wert von c1' und Konsumgüter im Wert von v1' zur Verfügung, mit denen sie neue Produktionsmittel im theoretischen Wert von w1' = [w1 (1+g)] herstellen kann, also um m1' = [m1 (1+g)] mehr als in der Vorperiode hergestellt wurde.

Abteilung 2 muss entsprechend von Abteilung 1 Produktionsmittel im Wert von c2' = [c2 (1 + g)] kaufen und Konsummittel im Wert von v2' = [v2 (1 + g)] von sich selbst (wieder nehme ich an, dass der Erwerb der Konsummittel aus der eigenen Abteilung geldlos vor sich gehen soll).

Wird mit Hilfe des vorgeschossenen Kapitals in Warenform im Wert von c1' + v1' bzw. c2' + v2' und bei invarianter technischer und organisatorischer Situation in den Betrieben produziert, ergibt sich folgendes Schema:

c1' + v1' + m1' = w1' (Investitionsgüterabteilung)
c2' + v2' + m2' = w2' (Konsumgüterabteilung)

wobei die Arbeitskräfte nun ein Mehrprodukt im theoretischen Wert von m1' bzw. m2' herstellen, das jeweils um den Faktor (1+g) größer ist als in der Vorperiode.

Damit sich gleichgewichtiges Wachstum einstellt, müssen die branchenspezifischen

Verhältnisse von c, v und m so liegen, dass

$$c1' + c2' = w1$$

und

$$v1' + v2' = w2,$$

was bedeutet, dass

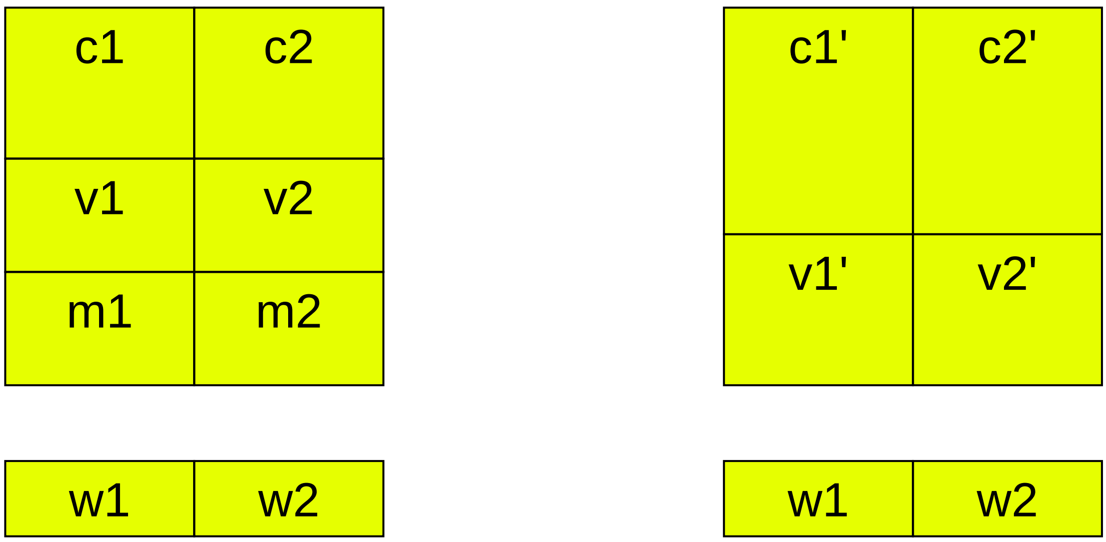
$$(c1 + c2)\ (1 + g) = w1$$

und

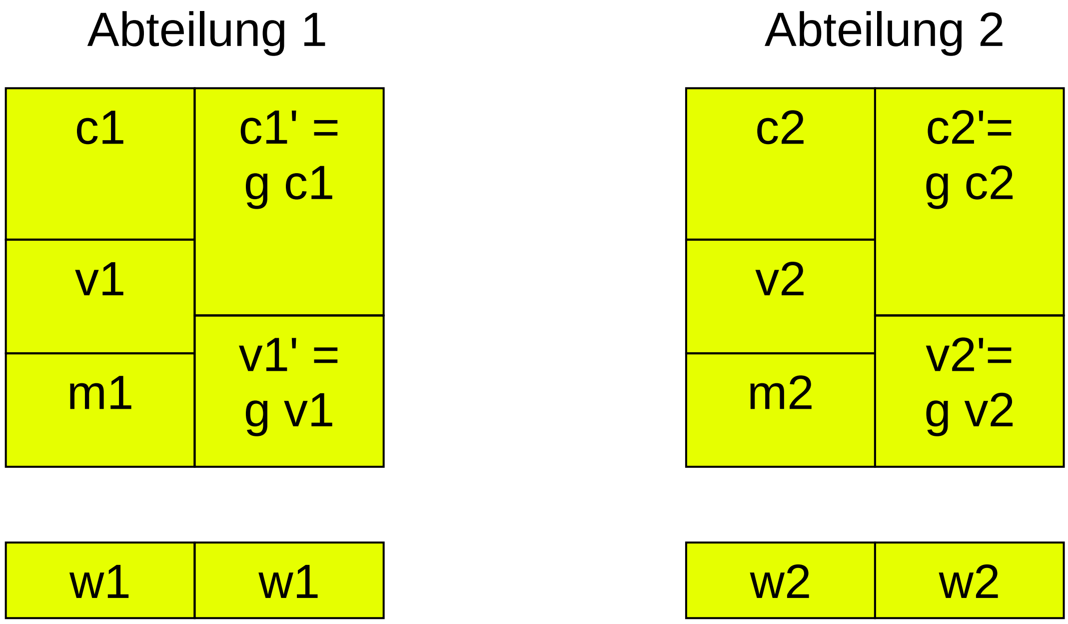
$$(v1 + v2)\ (1 + g) = w2.$$

Die folgenden Zeichnungen sollen die Allokation der Produktions- und Konsummittel in zwei Schritten illustrieren: Der erste Prozess zeigt in zwei Bildern die Reallokation der erzeugten Waren in Marx'scher Schreibweise:

W - G - W

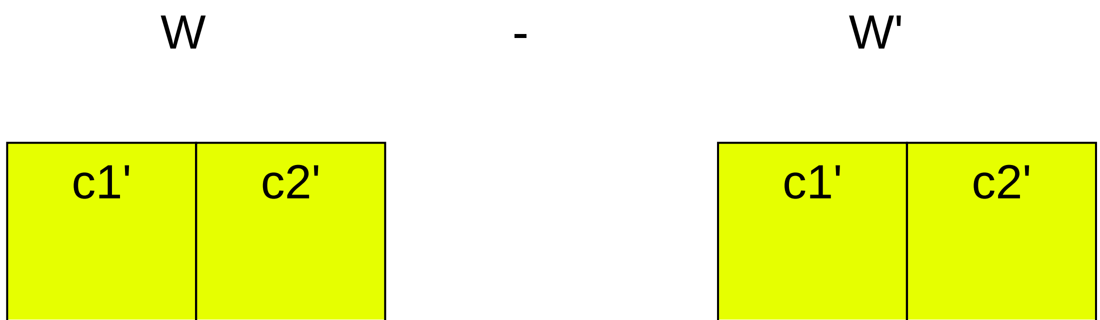


Stofflicher Ersatz der Werte in



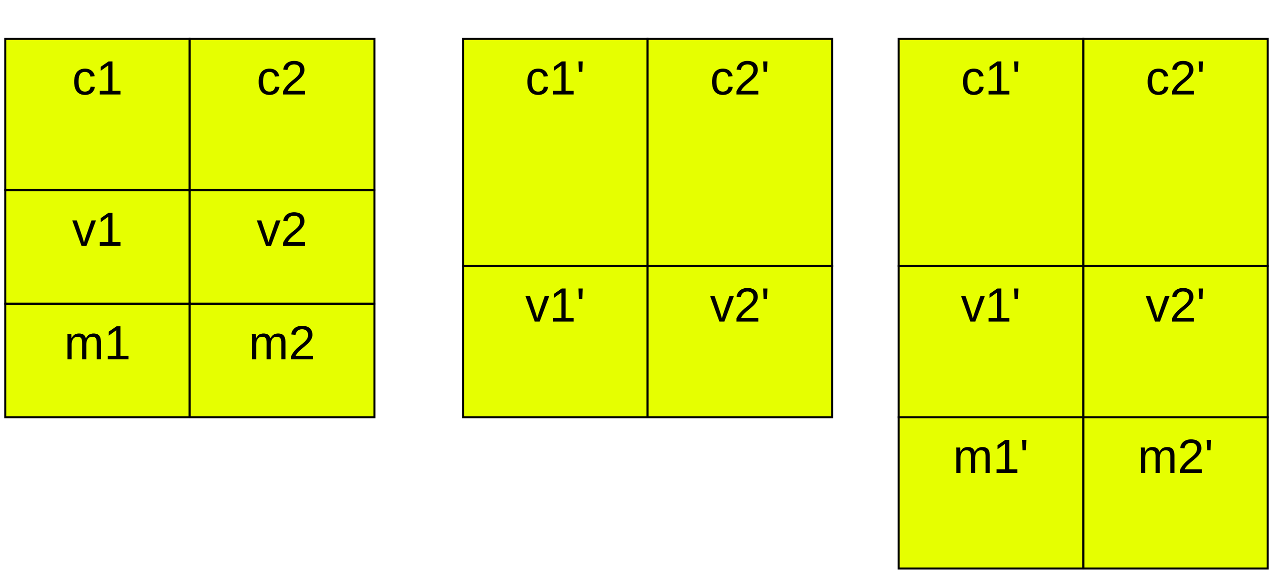
Die obigen Grafiken zeigen in den linken Hälften die ursprüngliche Wertzusammensetzung der Waren zu Beginn und in den rechten Hälften die Situation nach Ende der Allokation nach Abteilungen. Die gelb eingefärbten Rechtecke symbolisieren Zukäufe aus der jeweils anderen Abteilung in festgelegter Höhe.

Der zweite Prozess ist der Produktionsprozess, der aus den vorhandenen Produktions- und Konsumtionsmitteln (W) mittels Arbeit mehr neue Waren (W') herstellt:



In Kombination ergeben die beiden Prozesse folgendes Bild. Die Situation rechts außen stellt eine neue Ausgangssituation dar, von der aus die erweiterte Reproduktion erneut vor sich geht.

W - G - W - W'



Betrachten wir die quantitativen Verhältnisse einer Periode eines kompletten erweiterten Reproduktionsprozesses W – G – W – W', folgt, dass die Werte des konstanten und variablen Kapitals nicht beliebig gewählt werden dürfen, sondern schon von vornherein Einschränkungen unterliegen. Daraus wird aber auch ersichtlich, dass die beiden Sektoren mehr oder weniger symmetrisch sind und es bei Annahme einer konstanten Technologie keine Priorität des Produktionsmittelsektors gibt (wie noch bei Marx und dann in der SU angenommen).

Die obigen Gleichungen lassen sich in alle Richtungen umformulieren, um die Beziehungen zwischen den Komponenten der verschiedenen Abteilungen explizit zu machen:

$c1' + c2' = w1 = (c1 + c2) (1+g) = c1 + v1 + m1 \Rightarrow c1\ g + c2 (1+g) = v1 + m1$

$= n1$ (neu geschaffener Wert)

und

$v1' + v2' = w2 = (v1 + v2) (1+g) = c2 + v2 + m2 \Rightarrow v1 (1+g) + v2\ g = c2 + m2.$

Daraus ergibt sich, dass bei einem Ausbeutungsgrad $e = m/v$ (wodurch m1 und m2 eliminiert werden können) nur jeweils zwei Variablen aus den vier (c1, c2, v1, v2) frei gewählt werden können, die anderen sind schon festgelegt.

Wählen wir z.B. $c1$ und $c2$ frei, ergeben sich mit

$$m1 = e1\ v1$$

und

$$m2 = e2\ v2$$

$$(1 + e)\ v1 = g\ c1 + (1 + g)\ c2$$

und

$$(e - g)\ v2 = (1 + g)\ v1 – c2$$

Die zweite Gleichung macht deutlich, dass $c2$ im Vergleich zu $v1$ nicht zu groß werden darf, sonst könnte sich ein negatives $v2$ ergeben, was sinnlos wäre.

Auflösen nach $v1$ bzw. nach $v2$ ergibt folgende zwei Gleichungen

$$v1 = [g\ c1 + (1 + g)\ c2] / (1 + e)$$

und

$$v2 = [(1 + g)\ v1 – c2] / (e – g) =$$
$$v2 = \{(1 + g)\ [g\ c1 + (1 + g)\ c2] / (1 + e) – c2\} / (e – g) =$$
$$v2 = \{(1 + g)\ [g\ c1 + (1 + g)\ c2 – (1 + e)\ c2] / (1 + e)\} / (e – g) =$$
$$v2 = (1 + g) / (1 + e)\ [g\ c1 + (g – e)\ c2] / (e – g)$$

Wählen wir als Alternative z.B. $c1$ und $v1$ frei, ergeben sich mit

$$m1 = e1\ v1 \text{ und } m2 = e2\ v2$$

$c2$ und $v2$ als Funktionen von $c1$ und $v1$ wie folgt:

$$c2 = (v1 + e1\ v1 - c1\ g) / (1+g)$$
$$c2 = [v1\ (1 + e1) - c1\ g] / (1+g)$$

und

$$v2\ g - e2\ v2= c2 - v1\ (1+g)$$
$$v2\ (g – e2) = [v1\ (1 + e1) - c1\ g] / (1+g) - v1\ (1+g)$$
$$v2\ (g – e2) = v1\ [(1 + e1) / (1+g) – (1+g)] - c1\ g / (1+g)$$
$$v2\ (g – e2) = v1\ [(1 + e1) – (1+2\ g+g\ g\ )]/(1+g) - c1\ g / (1+g)=$$
$$v2 = \{v1\ [e1– 2\ g – gg] - c1\ g\} / (1+g) / (g – e2)$$

Numerisches Beispiel:

Gegeben sind die Ausbeutungsrate e=1 und das Wirtschaftswachstum g=10%, der konstante Kapitalvorschuss in der Produktionsmittel- und Konsummittelabteilung, c1 bzw. c2. Mit der obigen Variante für die Berechnung von v1 bzw. v2 erhält man folgendes Schema der Ausgangssituation (links unten). Nach der geldvermittelten Umschichtung der Waren durch Kauf und Verkauf erhält man die Ausgangssituation für die nächste Produktionsperiode (rechts unten)

W - G - W

c1	c2	Summe		c1'	c2'	Summe
200	**20**	220		220	22	242
v1	v2			v1'	v2'	
21	3,44	24,44		23,1	3,79	26,89
m1	m^2					
21	3,44	24,44				
w1	w2					
242	26,89	268,89				

Durch Kombination von Waren mit Arbeitskraft werden ohne Geldverwendung neue Waren W' hergestellt, deren Wertzusammensetzung die folgende Tabelle abbildet:

W - W'

c1'	c2'	Summe		c1'	c2'	Summe
220	22	242		220	22	242
v1'	v2'			v1'	v2'	
23,1	3,79	26,89		23,1	3,79	26,89
				m1'	m^2'	
				23,1	3,79	26,89
				w1'	w2'	
				266,2	29,58	295,78

Wie nachprüfbar ist, hat auf diese Weise ein gleichgewichtiges Wachstum um 10% stattgefunden.

Was kosten die Kredite?

Unter der Annahme, dass für die volle Höhe der jeweiligen Käufe eines Sektors vom anderen Kredite aufgenommen werden (in Wirklichkeit würde nur Kredit in der Höhe des Größeren der beiden Käufe aufgenommen werden müssen), fallen für die Produktions- und Realisierungszeit Zinsen z an, und zwar bei einem Zinssatz i

für Abteilung 1

$$z1 = i * v1' = (1+g)*i*v1,$$

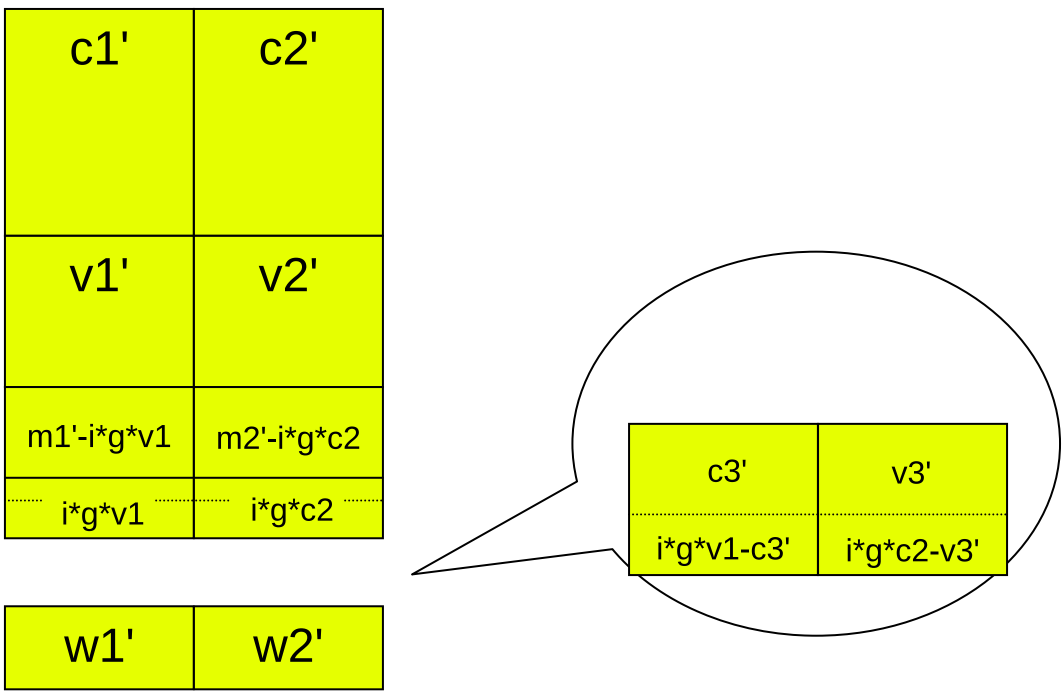
für Abteilung 2

$$z2 = i * c2' = (1+g)*i*c2.$$

Diese Zahlungen reduzieren den Mehrwert, der in der jeweiligen Abteilung als Gewinn verbleibt. Anstelle von m1' verbleiben als Gewinne nur noch m1' – i v1', bzw m2' - i c2'. Der Bankensektor erhält z1 + z2 an Zahlungen aus dem Mehrwert m1' bzw. m2' und die Kreditsumme selbst (nach der Realisierung der Waren von Abteilung 1 und 2 über den Markt).

Nehmen wir an, dass der Bankensektor als konstantes Kapital c3' und als variables Kapital v3' einsetzt (das zu Beginn der Produktionsperiode schon vorhanden sein muss, sonst kann er keinen Kredit vergeben), bleibt ihm ein Gewinn von

$$m3' = i (v1' + c2') – c3' – v3'.$$



Das obige Schema zeigt den Aufwand für Zinsen, der jeweils als Anteil des Mehrwerts an die Bank abgetreten werden muss. In der Sprechblase wird dieser Anteil in die nötigen Produktionsmittel und Konsummittel für die Bank je nach Herkunftsabteilung und in den zurechenbaren Gewinn unterteilt. Zeichnen wir das Schema nun mit einer dritten Abteilung, dem Kreditsektor, wird klar, dass c3' und v3' bereits Bestandteil der Produktion der vorigen Periode hätten sein müssen, also

$$w1 = c1' + c2' + c3' \quad \text{und } w2 = v1' + v2' + v3'$$

c1'	c2'	c3'
v1'	v2'	v3'
m1'-i*g*v1 i*g*v1	m2'-i*g*c2 i*g*c2	i*g*(v1+c2) -c3'-v3'

Dann können aber die vorher berechneten Werte v' und c' nicht korrekt berechnet worden sein (außer für c3' und v3' = 0), da ja galt:

$$w1 = c1' + c2' \quad \text{und} \quad w2 = v1' + v2'.$$

Die Rechnung muss daher ab dem Auftreten von Elementen des Bankensektors neu durchgeführt werden.

Wir nehmen fixe Werte für das konstante und variable Kapital im Bankensektor an. c3' stammt aus Abteilung I, v3' aus Abteilung II.

Die Ausgangssituation kann so bleiben wie zuvor, da zu diesem Zeitpunkt noch keine Banken existierten. Alle potentiellen Waren sind in ihren Herkunftsabteilungen versammelt. Geld steht keines zur Verfügung. Die Gründung einer Bank – eine neue Institution in unserem Schema – müsste so erfolgen, dass zu Beginn des Zyklus von Abteilung I c3' und von Abteilung II v3' an Produktions- bzw. Konsummitteln stofflich zur Verfügung gestellt werden. Dadurch werden gegenüber der ersten Fassung der Rechnung die gestrichenen Werte der beiden Abteilungen kleiner sein. Es ist mir klar, dass dieser Kraftakt nicht besonders elegant ist, aber wenn noch kein Geld zur Verfügung steht, das erst die Bank schöpfen soll, kann dieses Henne-Ei Problem hypothetisch nicht besser gelöst werden als über eine Vereinbarung der Kapitalisten der beiden Abteilungen, gemeinsam eine Bank zu gründen und die entsprechenden Mittel dazu stofflich zur Verfügung zu stellen.

Mit den Ausgangsgleichungen für die stoffliche Zusammensetzung der Kapitalvorschüsse zu Beginn der Produktion

$$w1 = c1' + c2' + c3' \quad \text{und} \quad w2 = v1' + v2' + v3',$$

einer angenommenen Wachstumsrate von g und einem Ausbeutungsgrad e erhalten wir

$$(c1 + c2)(1+g) + c3' = c1 + v1 + m1 \Rightarrow c1\, g + c2\,(1+g) + c3' = v1 + e\, v1$$

und

$$v1' + v2' + v3' = w2 = (v1 + v2)(1+g) + v3' = c2 + v2 + m2 \Rightarrow$$
$$(1+g)\, v1 + g\, v2 + v3' = c2 + e\, v2.$$

Nehmen wir c3' und v3' und g als gegeben an, lassen sich genau wie vorher nur zwei Variablen der vier (c1, c2, v1, v2) unabhängig voneinander festlegen. Die Werte der anderen zwei folgen aus der Auflösung der Gleichungen nach diesen.

Wähler wir z.B. c1 und c2 frei, ergeben sich mit

$$(1 + e)\, v1 = g\, c1 + (1 + g)\, c2 + c3'$$

und

$$(e - g)\, v2 = (1 + g)\, v1 + v3' – c2.$$

Die zweite Gleichung macht deutlich, dass c2 im Vergleich zu v1 und v3' nicht zu groß werden darf, sonst könnte sich ein negatives v2 ergeben, was sinnlos wäre.

Auflösen nach v1 bzw. nach v2 ergibt die folgenden beiden Gleichungen

$$v1 = [g\, c1 + (1 + g)\, c2 + c3'] / (1 + e)$$

und

$$v2 = [(1 + g) * v1 + v3' – c2] / (e – g)$$

Numerisches Beispiel:
wie oben, aber zusätzlich mit c3' = 10 und v3' = 5 und einem Zinssatz von 30%

W - G - W

c1	c2	c3'	Summe	c1'	c2'	c3'	Summe
200	**20**	10	230	220	22	10	252
v1	v2	v3'		v1'	v2'	v3'	
26	15,11	5	46,11	28,6	16,62	5	50,22
m1	m²						
26	15,11		41,11				
w1	w2		0				
252	50,22		302,22				

W - W'

c1'	c2'	c3'	Summe	c1'	c2'	c3'	Summe
220	22	10	252	220	22	10	252
v1'	v2'	v3'		v1'	v2'	v3'	
28,6	16,62	5	50,22	28,6	16,62	5	50,22
				i*v1'	i*c2'		
				8,58	6,6		15,18
				m1'-g*v1'	m²'-i*c2'		
				20,02	10,02		
				m1'	m²'	Bankgewinn	
				28,6	16,62	0,18	
				w1'	w2'	w3'	
				277,2	55,24	15,18	

Die Netto-Profitraten, die sich in diesem Beispiel ergeben, sind allerdings nicht gleich, sondern betragen 8%, 26% bzw. 1%, d.h. das Wachstum kann nicht in allen Abteilungen aus den eigenen Profiten finanziert werden. Dieser Mangel soll in der folgenden Rechnung behoben werden.

Die erweiterte Reproduktion in Matrixschreibweise

Um der Schwerfälligkeit der Marx'schen Rechnung aus dem Weg zu gehen, das Reproduktionsproblem in einer allgemeineren Form zu fassen und außerdem die heute zur Verfügung stehenden mathematischen Hilfsmittel der Matrizenrechnung zu verwenden (wodurch sich zusätzliche Einsichten in den Reproduktionsprozess ergeben), verallgemeinern wir das Marx'sche Schema auf n Abteilungen und stellen auf

Matrixschreibweise um. Die Trennung nach Abteilungen wird weniger prominent als im Marx'schen Schema. Jede Branche kann Konsummittel *und* Produktionsmittel erzeugen. Die einzelnen Branchen lassen sich zu Abteilung I und II zusammenfassen, wenn es gewünscht wird. Die Verflechtung innerhalb einer Abteilung lässt sich genauso präzise darstellen wie die Verflechtung zwischen den Abteilungen.

Mit

A ... Matrix der technischen Koeffizienten je Outputeinheit [n x n]
C ... Konsummatrix (analog zur Matrix A) je Outputeinheit [n x n]
w ... Zeilenvektor der branchenspezifischen Arbeitswerte je Ouptuteinheit [1 x n]
v ... Zeilenvektor der lebendigen Arbeit je Outputeinheit [1 x n]
p ... Zeilenvektor der Stückpreise [1 x n]
x ... Spaltenvektor der Outputs [n x 1]
g ... Wachstumsrate der Produktion
r ... Profitrate

ergibt sich für die Mengen

$$(A + C)\, x + g\, (A + C)\, x = x$$

für die Arbeitswerte

$$w\, A + v = w$$

und für die Stückpreise

$$p\, (A + C)\, x + p\, (A + C)\, r = p$$

Nach Vereinfachung ergeben sich zwei Eigenvektorgleichungen

$$(A + C)\, x = 1/(1 + g)\, x = \lambda\, x$$

und

$p\,(A + C) = 1/(1+r)\; p = \lambda\, x$

aus denen gleichzeitig Lösungen für die Preise und Mengen und den Eigenwert

$$\lambda = 1/(1+g) = 1/(1+r)$$

bestimmt werden können.

p und x müssen die Links- bzw. Rechtseigenvektoren bezüglich des Eigenwerts $\lambda = 1/(1 + g) = 1/(1 + r)$ der Matrix (A + C) sein. Die Höhe der gleichgewichtigen Wachstumsrate (= der durchschnittlichen Profitrate) hängt von allen technischen und Konsumkoeffizienten gleichzeitig ab. Generell gilt: Je kleiner die Koeffizienten, desto höher das Wachstum bzw. die Profitrate.

Auf der volkswirtschaftlichen Ebene lassen sich die Marx'schen Größen in obiger Notation wie folgt ausdrücken:

$$c = p\,A\,x,$$
$$v = p\,C\,x,$$
$$m = p\,x – p\,(A + C)\,x,$$
$$r = g = m / (c + v) = [\, p\,x – p\,(A + C)\,x] / p\,(A + C)\,x$$

Wie lässt sich nun eine Bank in das Modell einfügen?

Das geht sehr einfach, indem wir einen Banken-Sektor hinzufügen, und zwar, indem der nötige Kapitalvorschuss für die Bank als Bestandteil der Endnachfrage in der Startperiode eingeführt wird, und indem aus dem Mehrwert der folgenden Periode die Zinsen bezahlt werden, die in Summe den Umsatz der Bank ausmachen.

Nicht so einfach ist die Interpretation der so erzeugten Erweiterung in Arbeitswerten. Banken sind offensichtlich eine Branche, die zwar Kosten hat, die in Arbeitswerten ausgedrückt werden können (c3' und v3'), in der aber nicht selbst Wert zur Volkswirtschaft hinzugefügt, sondern verbraucht wird, der in den Abteilungen I und II produziert wurde. Diese Eigenschaft ist im Allgemeinen typisch für Dienstleistungssektoren , in denen zwar Gebrauchswerte hergestellt werden, die aber im Augenblick der Produktion wieder verbraucht werden, und damit im Unterschied zu Waren keine Beständigkeit in der Zeit aufweisen. Deshalb können Dienstleistungssektoren nichts zum Mehrprodukt und damit auch nichts zum Mehrwert beitragen. Die Volkseinkommensrechnung nach Stone, das SNA (System of National Accounts), enthält daher gegenüber der Rechnung nach dem MPS (Material Product System), das in den untergegangenen sozialistischen Ländern üblich war, Doppelzählungen. Wie oben gezeigt, erhalten die Banken für ihre Kredite Zinsen, die einen Abzug vom Mehrwert in Abteilung I und II bedeuten, der ein zweites Mal als weiterer Sektor im Input-Output Schema auftritt. Dadurch wird der Unterschied zwischen den Systemen der Volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung deutlich: Während das MPS die Erzeugung von Werten auf stofflich-materieller Grundlage betont, stellt das SNA auf bepreiste Gebrauchswerte ab. In der Sicht des SNA gibt es keinen Unterschied zwischen materiellen Produkten und Dienstleistungen, im MPS System schon.

Eine Aufgabe kann unter dieser Sicht sofort gestellt werden: Wie sehen die Preise aus, die gleiche Profitraten für alle Sektoren ergeben? Dies würde spezielle Preis- und Mengenrelationen bedeuten, bei denen es für die Kapitalisten keinen Anreiz gibt, die Branche zu wechseln, da dann die sektorspezifischen Profitraten überall gleich hoch und gleich der durchschnittlichen Profitrate wären.

Beispiel:

Unter Verwendung der Marx'schen Originalwerte (Kapital Band 2, S.505ff.) erhalten wir folgendes Schema in gestürzter Schreibweise:

Beispiel 1	Abt 1	Abt II
c	4000	1500
v	1000	750
m	1000	750
w	6000	3000

Wir berechnen als erste Abweichung vom Original Produktionspreise p und die Aktivitätsniveaus x der beiden Abteilungen, die gleichgewichtiges Wachstum erlauben, wobei wir die Marx'sche Methode (Kapital Band 3, Neuntes Kapitel: Bildung einer allgemeinen Profitrate (Durchschnittsprofitrate) und Verwandlung der Warenwerte in Produktionspreise. in: MEW Bd 25, S.164ff) iterativ nicht nur auf die relativen Stückpreise, sondern auch auf die Aktivitätsniveaus selbst anwenden (als Invariante nehmen wir die Wertsumme = 9000)

Nach Leontief ergibt sich durch Normierung auf die Outputwerte die Matrix (A+C) zu

0,67	0,5
0,17	0,25

wobei A, die Matrix der technischen Koeffizienten, aus der obigen ersten Zeile und einer zweiten Zeile mit Nullen besteht, und C, die Matrix der Konsumkoeffizienten, aus obiger zweiter Zeile mit einer ersten Zeile aus Nullen. Die Löhne sind noch nicht als Geldlöhne explizit vorhanden, sondern werden von den Unternehmen in Sachmitteln zur Verfügung gestellt. Die Möglichkeit, Geldlöhne zu zahlen, ist schon in dieser Version gegeben. Die Haushalte wirken als vorübergehender Aufenthaltsort des Geldes. Sie geben alles Geld, das sie erhalten, innerhalb eines Jahres für Konsummittel aus. Sparen der Haushalte ist jedoch noch nicht vorgesehen.

Hypothetisch könnten wir bei konstanter Technologie annehmen, dass die Werteinheiten proportional zu den Mengeneinheiten der jeweiligen Abteilung sind und die relativen Preise den Zahlenwert =1 besitzen.

Durch die Berechnung der Eigenvektoren und des Eigenwerts aus der Matrix (A+C) erhalten wir die Größenverhältnisse für Mengen und Preise, die eine gleichgewichtige erweiterte Reproduktion der Wirtschaft ergeben (natürlich nur unter den Voraussetzungen, dass immer die nötigen Arbeitskräfte vorhanden sind und dass die Natur nicht an ihre Grenzen stößt).

Iteration[2] ergibt den Rechtseigenvektor x (für die Mengenverhältnisse) und den Linkseigenvektor p (für die relativen Stückpreise) und den zugehörigen Eigenwert λ der Matrix (A+C),

$$\lambda = 1/(1+g) = 1/(1+r),$$

2 x(i+1) = (1+g(i)) (A+C)x(i), p(i+1) = (1+r(i)) p(i)(A+C),
1+ r(i) = 1 + g(i) = WURZEL[p(i)x(i) / p(i)(A+C)(A+C)x(i)]; i ... Iterationsindex

der in diesem Fall sowohl das Mengenwachstum g als auch die Profitrate r bestimmt.

Eigenvektoren und Eigenwert:

x(i=0)	x(i=1)	x(i=2)	x(i=11)	x(i=12)	x(i=13)
6000,000000	6795,342408	6891,340994	6905,054529	6905,054529	6905,054529
3000,000000	2162,154403	2054,757636	2039,294926	2039,294926	2039,294926
p(i=0)'	p(i=1)'	p(i=2)'	p(i=11)'	p(i=12)'	p(i=13)'
1,000000	1,029597	1,032647	1,033073	1,033073	1,033073
1,000000	0,926638	0,916738	0,915304	0,915304	0,915304
px					
9000,000000	9000,000000	9000,000000	9000,000000	9000,000000	9000,000000
1+r(i) = 1+g(i) = WURZEL[p(i)x(i) / p(i)(A+C)(A+C)x(i)]					
1,235517	1,228117	1,228000	1,227998	1,227998	1,227998

Das Schema mit Produktionspreisen (modifizierten Arbeitswerten) ergibt sich bei gleicher Wertsumme zu

	Abt I	Abt II	Summe	diag(p)y	diag(p)x	g
c	4755,62	1053,37	5808,99	1324,44	7133,43	0,227998
v	1053,37	466,64	1520,01	346,56	1866,57	0,227998
Summe	5808,99	1520,01				
"Mehrwert"	1324,44	346,56				
pdiag(x)	7133,43	1866,57			9000	
r	0,227998	0,227998				

Dieses Schema erlaubt eine gleichgewichtig erweiterte Reproduktion mit einer Wachstumsrate g von 22,7998 % und einer ebenso hohen Profitrate r.

Fügen wir einen Bankensektor hinzu (dessen Kapital ein bestimmter Anteil β an den gesamten erzeugten Mengen x sein soll, in diesem Fall 5%) und schreiben das Schema zu hypothetischen Mengeneinheiten an, erhalten wir:

Mengen				Bankensektor	
(A+C)diag(x)		g(A+C)diag(x)		b = βx	x
4603,37	1019,65	766,91	169,87	345,25	6905,05
1150,84	509,82	191,73	84,94	101,96	2039,29

Die ersten beiden Reihen geben die Vorleistungsverflechtungsmatrix wieder, die zweiten beiden Reihen enthalten die zur Erweiterung der Produktion notwendigen

Produktionsmittel (erste Zeile) und Konsummittel (zweite Zeile). Spalte 5 enthält das physische Kapital, das für die Tätigkeit der Bank notwendig ist. Die letzte Spalte enthält die Zeilensumme, die gleich den Outputmengen x ist.

Nun weicht die mögliche gleichgewichtige Wachstumsrate g von der Profitrate r ab, da der Bankensektor einen Anteil der Produktion x als konstantes Kapital einsetzt. Obwohl einerseits die Bank die monetären Transaktionen erst ermöglicht, ist dies nicht gratis zu haben. Das maximal mögliche Wachstum wird reduziert. Die Wachstumsrate g ist bei positivem Kapitaleinsatz in der Bank ($\beta > 0$) immer kleiner als die Profitrate r.

$$g = (1+r)(1 - \beta) - 1 = 1 + r - \beta - r\,\beta - 1 = r - \beta - r\beta\ .$$

Das gesamte Kapital liegt in obiger Darstellung in Warenform vor, wir stehen am Beginn eines Kapitalumschlags. Für die Aneignung der Waren in einer Zusammensetzung, die den Produktionserfordernissen entspricht, müssen Teile des Warenkapitals ihre Besitzer wechseln (Reallokation). Der Besitzwechsel wird über Geld vermittelt, das durch Kredite der Bank zur Verfügung gestellt wird. Der Einfachheit halber nehmen wir großzügig an, dass Kredite in der Höhe der gesamten Wertsumme der einzelnen Abteilungen vergeben werden, p diag(x)[3]. Für die Kredite müssen am Ende der Produktion aus dem gesamten produzierten Mehrwert Zinsen in der Höhe von i p diag(x) bezahlt werden. Die Summe aller Zinszahlungen i p x soll so hoch sein, dass sie den Kapitalvorschuss finanziert und außerdem für die Bank eine Profitrate pi abwirft, die ebenso hoch ist wie in den Abteilungen I und II. Mit einem Bankprofit von (i p x $-$ β p x) ergibt sich eine Bankprofitrate pb von

$$pb = (i\,p\,x - \beta\,p\,x) / (\beta\,p\,x) = (i - \beta) / \beta\ .$$

Sie soll gleich den Industrieprofitraten der einzelnen Abteilungen sein. Sie lassen sich aus den Industrieprofiten berechnen, die sich aus dem Mehrwert

$$r\,(1+g)\,p(A+C)\mathrm{diag}(x)$$

nach Abzug der Zinszahlungen

3 In einer virtuellen Realität genügen wesentlich kleinere Kredite, ja eigentlich würde schon 1 Cent genügen, der gegengleich zu den Waren den Besitzer wechselt. Die Waren müssten nur beliebig teilbar sein und die einzelnen Transaktionen in kürzester Zeit vor sich gehen können. Nähme z.B. Abteilung I einen Kredit in der Höhe eines Cent auf, können damit Konsummittel gekauft werden. Abteilung II verwendet den Cent, um Produktionsmittel von Abteilung I zu kaufen, usw. bis der Cent zuletzt wieder zu seinem Ausgangspunkt zurückkehrt (wenn eine lückenlose Umverteilung der vorhandenen Güter angenommen wird) und der Bank retourniert werden kann. Abteilung I müsste dann nur Zinsen für den Cent bezahlen.

$$i\ p\ \mathrm{diag}(x)$$

zu

$$\text{Industrieprofitvektor} = r\ (1+g)\ p(A+C)\mathrm{diag}(x) - i\ p\ \mathrm{diag}(x) = [r(1+g)/(1+r) - i]\ p\mathrm{diag}(x),$$

da p(A+C) wegen $p(A+C)\ (1+r) = p$ nichts anderes als der mit dem Eigenwert multiplizierte Linkseigenvektor der Produktionspreise ist. Bei einem sektoriellen Kapitalvorschuss von

$$(1+g)\ p(A+C)\mathrm{diag}(x) = (1+g)/(1+r)\ p\mathrm{diag}(x)$$

erhalten wir für die industriellen Profitraten pi

$$pi = [r(1+g)/(1+r) - i]/[(1+g)/(1+r)].$$

Da wir vorausgesetzt haben, dass die Industrieprofitraten und die Bankprofitrate gleich sein sollen, ergibt sich aus

$$pi = [r(1+g)/(1+r) - i]/[(1+g)/(1+r)] = (i - \beta) / \beta = pb$$

der Zinssatz i

$$i = \beta(1+g)(1+r)/[1+g) + \beta(1+r)].$$

Aus dieser Gleichung kann die Wachstumsrate eliminiert werden, wenn die Beziehung zwischen Wachstumsrate, Profitrate und Bankanteil eingesetzt wird

$$\boxed{g = pi = pb = r - \beta(1+r).}$$

Daraus ergibt sich eine einfache Formel zur Berechnung des Zinssatzes i[4]

$$\boxed{i = \beta(1-\beta)(1+r)}$$

In den Zahlenwerten des Beispiels wird mit $\beta = 5\%$ und $r = 22{,}7998$

---

4 Es scheint interessant, darauf hinzuweisen, dass der maximale Zinssatz (bei $\beta = 0{,}5$) bei Aufrechterhaltung gleicher Profitraten in allen drei Sektoren ein Viertel der um 1 vermehrten Profitrate p beträgt, also bei r = 0,2 z.B. 30%. "In Italien mußten zuweilen 40% gezahlt werden, obgleich vom 12.-14. Jahrhundert der gewöhnliche Satz 20% nicht überschritt" (Das Kapital, Bd. 3, S. 611).

g = pi = pb = 16,6598% und i = 5,83299%.

Nach Reallokation, aber vor der Produktion, erhalten wir folgende Input-Output-Tafel mit Werten der Dimension [Preise mal Mengen], in die wir den Bankensektor als dritte Spalte integrieren:

(1+g)diag(p)(A+C)diag(x)			
	Abt I	Abt II	Bankensektor
Abt I	5547,89	1228,86	356,67
Abt II	1228,86	544,39	93,33
Summe Vorl	6776,75	1773,25	450

Durch Kombination der Produktions- und Lebensmittel mit lebendiger Arbeit (diesmal sind es um den Faktor (1+g) mehr Arbeitskräfte als in der vorigen Periode), also durch den Produktionsvorgang, wird neuer potentieller Wert erzeugt bzw. alter übertragen. Der erzielbare Gesamtprofit bezieht sich auf eine um den Faktor (1+g) gewachsene Wirtschaft. Da die Zinszahlungen ebenfalls proportional zum vorgeschossenen Kapital angenommen wurden, bleiben die Industrieprofitraten gleich. Bei dem oben errechneten Zinssatz ergibt sich auch im Bankensektor eine Bankprofitrate von 0,166598 Prozent. Die Gewinn- und Outputsituation sieht im Input-Output Schema wie folgt aus:

Gesamtprofit=	r(1+g)p(A+C)diag(x)		
Profit + Zinsen	1545,09	404,3	
Industrieprofit	1129	295,42	74,97
Zinsen an Bank	416,09	108,88	524,97
	(1+g)pdiag(x)		
Output	8321,84	2177,54	
pi	0,166598	0,166598	0,166598
r	0,227998	0,227998	

Die Bank kann nun - wie alle anderen Abteilungen - ihr konstantes und variables Kapital nicht nur reproduzieren, sondern im Ausmaß der Industrieprofitrate pi = Bankprofitrate pb = Wachstumsrate g erweitern.

Wie weiter?

Exkurs ins Geld:

Hier soll gezeigt werden, wie die Käufe und Verkäufe finanziert werden können, bzw. wieviel Kredit man braucht, um sowohl die Re-Allokation der Produktionsmittel von den Herstellern der Produktionsmittel zu ihren Nutzern (den produzierenden Unternehmen) als auch die Realisierung des Mehrprodukts zu bewerkstelligen, das von den produzierenden Unternehmen zusätzlich erzeugt wird.

Der nächste größere Schritt soll auf der Ebene der Wirtschaftssubjekte erfolgen, also Unternehmen sollen individuell abgebildet werden, die miteinander Handel treiben und Investitionsgüter kaufen, und Haushalte, die Konsumgüter kaufen und die Arbeitskraft verkaufen. Sie sollen auf der Simulationsebene Akteurtypen darstellen, deren Struktur immer gleich ist, deren individuelle Ausprägungen aber quantitativ unterschiedlich sein können.

Bisher wurde die Rechung nur mit zirkulierendem konstentem kapital durchgeführt. Die Erweiterung um fixes Kapital ist einfach. Nehmen wir an, dass die Kapitalmatrix auf Einsniveau mit K bezeichnet wird. Die Elemente kij der quadratischen Matrix K geben den fixen Kapitaleinsatz in der j-ten Branche an, der in der i-ten Branche produziert wurde.

Daraus lassen sich die beiden Eigenvektorgleichungen über die Hilfsgleichungen

$$(A+C)x + g(K+A+C)x = x$$

und

$$p(A+C)+rp(K+A+C) = p$$

ableiten. Aus

$$[E-(A+C)]x = g(K+A+C)x$$

und

$$p[E-(A+C)]= rp(K+A+C)$$

folgen die beiden Eigenvektorgleichungen

$$[E-(A+C)]^{-1}(K+A+C)x = 1/g\ x$$

und

$$p(K+A+C)\ [E-(A+C)]^{-1} = 1/r\ \ p$$

Überlegungen zu Preissystemen, die zu einem fixen System der materiellen Produktion zulässig sind

1. Gegeben sind A und C als Matrizen (A … technische Koeffizienten, C … Konsum und l … Arbeitskoeffizienten (Zeilen)Vektor - direkte Arbeit pro Outputeinheit).
2. Mengen: S sei die Matrix, die später das Mehrprodukt pro Outputeinheit angibt. Im folgenden soll die spätere Bedeutung der Matrix S gezeigt werden: Die Outputmengen x (Spaltenvektor) ergeben sich bis auf einen Faktor aus

   $$(A + C + S)x = x$$

   X ist also der Rechts-Eigenvektor von (A + C + S), Eigenwert = 1
3. Preise: Die Unit-Preise ergeben sich als Links-Eigenvektor der Matrix (A + C + S) aus

   $$p(A + C + S) = p$$

4. Mehrprodukt: Da die technischen Koeffizienten und der Unit-Konsum als konstant angenommen wurden, ist das Mehrprodukt s (Spaltenvektor)

   $$s = x – x(A + C)$$

5. Profit: Der Profit π pro Outputeinheit ergbit sich aus

   $$\pi = w - w\ (A + C)$$

6. Konstruktion der Surplus-Matrix S: Prinzip: Die S-Matrix gibt die Verteilung des Mehrprodukts auf Grund der Gewinnlage an und kann wie folgt konstruiert werden. Der Mehrproduktvektor s wird auf die einzelnen Branchen je nach vorhendenem Gewinn aufgeteilt, sodass eine Matrix S entsteht, die angibt, aus welcher Branche i (Zeilenindex) in welcher Branche j (Spaltenindex) das Mehrprodukt investiert und gleichzeitig aus dem Profit finanziert werden kann. Für alle S soll daher gelten

$$Sx = s \text{ und } pS = \pi$$

   d.h. das Mehrprodukt ist konstant (unter den gegeben technischen, institutionellen und politischen Bedingungen). Die Profitmasse berechnet sich zu

$$\pi\, x = p\, s$$

   Eine einfache Möglichkeit, das Mehrprodukt nach den Profiten proportional auf alle Branchen aufzuteilen, ist eine Matrixmultiplikation das Spaltenvektors s (!) mit dem Zeilenvektor π, wodurch eine Matrix entsteht, die noch durch die Profitmasse normiert werden muss, damit die Dimension korrekt ist.

$$S = s\,\pi \;/\; \pi\, x \text{ oder } S = s\,\pi \;/\; ps$$

7. Nun können wir einzelne Preissysteme testen und sehen, welche Gestalten die S-Matrix annehmen kann, wenn A, C und s gegeben sind.
8. Besipiel 1: Arbeitswerte. Mit den Arbeitskoeffizienten l lassen sich die klassischen Arbeitswerte w (unit labour values, Zeilenvektor) berechnen. Sie ergeben sich aus $wA + l = w$ und Rechts-Multiplikation mit der Leontief-Inversen zu

$$w = l\,(E – A)^{-1}$$

9. Der hier als Mehrwert auftretende (unit) Profit ergibt sich zu $\pi = w - w(A + C)$, das Mehrprodukt s bleibt wie oben $s = x – (A + C)x$ konstant. Die Surplus-Matrix S wird zu $S = (E – A – C)x\, w(E – A – C) / [w(E – A – C)\, (E – A – C)x]$. Setzen wir w ein, erhalten wir S als Funktion der Arbeits- und technischen Koeffizienten
   $S = (E – A – C)x\, l\, (E – A)^{-1}\, (E – A – C) / [l\, (E – A)^{-1}\, (E – A – C)\, (E – A – C)x]$
10. Probe: Es muss gelten $pS = \pi$. Ist $\pi = w\, [E – (A + C)] = l\, (E – A)^{-1}\, [E – (A + C)]$ und

$p = w$, so wird $w\,S = w\,s\,\pi\ / w\,s = \pi$, oder umständlich eingesetzt

$w\,S = [l\,(E-A)^{-1}\,(E-A-C)x\,l\,(E-A)^{-1}\,[E-(A+C)]\,/\,l\,(E-A)^{-1}\,[E-(A+C)x] =$

$= l\,(E-A)^{-1}\,[E-(A+C)] = \pi$. q.e.d.

11. Beispiel 2: Produktionspreise. Die Produktionspreise pp können, seitdem sie Marx definiert und in erster Näherung berechnet hat, in Übereinstimmung mit von Bortkiewicz als Links-Eigenvektoren der Matrix (A + C) aufgefasst werden.

$$pp\,(A+C)\,(1+r) = pp.$$

Der dazugehörige Eigenwert hat den Wert 1/(1+r). Seine Existenz ist genauso wie die gleichen Vorzeichen von pp durch das Perron-Frobenius-Theorem bei nichtnegativen Koeffizienten der Matrix (A + C) gesichert. (noch genauer zu belegen). Der (unit) Profit-Vektor ergibt sich aus: $\pi = pp - pp\,(A+C)$ unter Verwendung der Eigenvektorgleichung von oben als Vektor proportional zu den Produktionspreisen pp mit

$$\pi = r/(1+r)\ pp$$

Die Matrix S wird zu

$$S = r/(1+r)\,(E-A-C)x\ pp\ /\ [\,r/(1+r)\ pp\ x] =$$

$$= (E-A-C)\ x\ pp\ /\ (pp\ x) = s\ pp\ /\ (pp\ x)$$

Probe: $p\,S = \pi$? Mit $p = pp$ und $\pi = r/(1+r)\ pp$ wird

$p\,S = pp\ s\ pp\ /\ (pp\ x) = \pi$, da pp s die Profitmasse unter Produktionspreisen und pp x die gesamte Preissumme ist. Der Quotient der beiden ergibt bei einer Profitrate r, die sich auf die Produktionskosten bezieht, genau r/(1+r). Multipliziert mit pp sind das genau die branchenspezifischen Profite pro Outputeinheit, die untereinander gleich sind.

12. Beispiel 3: Emprische I-O Tabelle. Die Matrix A wird üblicherweise durch Division der einzelnen Spalten der Verflechtungsmatrix durch den jeweiligen Brutto-Produktionswert der Branche angenähert. Der Fehler, der dabei begangen wird, stammt aus der praktischen Unkenntnis, die Mengen und Preise der einzelnen Waren zu kennen, sondern nur mehr oder weniger detaillierte Aggregate in Geldeinheiten (z.B. Millionen Euro). Das Prinzip des Fehlers lässt sich leicht

aufweisen. Ist Z die empirische Verflechtungsmatrix, könnte sie im Idealfall durch

$$Z = \mathrm{diag}(p)\ A\ \mathrm{diag}(x)$$

beschrieben werden. Die tatsächlich errechnete Matrix $\bar{A}$, die A annähern soll, ist von A wie folgt verschieden:

$$\bar{A} = Z\ \mathrm{diag}(p)^{-1}\mathrm{diag}(x)^{-1} = \mathrm{diag}(p)\ A\ \mathrm{diag}(p)^{-1}$$

Dies bedeutet, dass die empirisch gewonnenen technischen Koeffizienten genau genommen vom Verhältnis der „wahren" relativen Preisen abhängen, also

$$a_{ij} = p_i/p_j\ a_{ij}.$$

Für die Matrizen C und S gilt analoges.

C kann entweder auf den Konsumvektor, der den Konsum der Nicht-Lohnabhängigen mit einbezieht, oder nur auf den Konsum der Lohnabhängigen bezogen werden, indem nur der Anteil des Konsums, der von den Löhnen gekauft werden kann, berücksichtigt wird. Der Konsum der Nicht-Lohnabhängigen fällt dann auf der Verteilungsseite unter die Kategorie Nicht-Lohneinkommen. Da wir auf der empirischen Ebene einer wirklichen Volkswirtschaft die Mengen nicht kennen, können wir – um im Leontief-Schema zu bleiben - die „Stück"-Preise p mit 1 festlegen und die „Mengen" hypothetisch mit den Brutto-Produktionswerten identifizieren. Haben wir so die A und C Matrizen und auch noch die Arbeitskoeffizienten (Arbeitszeit bzw. Beschäftigte pro Brutto-Produktionswerteinheit) bestimmt, lässt sich unter Vernachlässigung des Aussenhandels, der eine komplexere Behandlung benötigt, die S-Matrix berechnen. $S(\text{empirisch}) = [\mathrm{diag}(p)\ s]\ [\pi\ \mathrm{diag}(x)]\ [\mathrm{diag}(x)^{-1}\ \mathrm{diag}(p)^{-1}]\ /\ [p\ s]\ \neq S = s\ \pi\ /\ p\ s$ stimmt genauso wenig wie die empirisch gefunden Matrix A mit der theoretischen Matrix S überein. Der Unterschied liegt wie bei A in den Quotienten der relativen Preise

$$\begin{aligned} S(\text{empirisch}) &= [\mathrm{diag}(p)\ s]\ [\pi\ \mathrm{diag}(x)]\ [\mathrm{diag}(x)^{-1}\ \mathrm{diag}(p)^{-1}]\ /\ [p\ s] \\ &= \mathrm{diag}(p)\ S\ \mathrm{diag}(p)^{-1}\ \neq S \end{aligned}$$

13. Weitere Überlegungen: Die hier angeführten Besipiele für S Matrizen stellen nur einige wenige von unendlich vielen Möglichkeiten dar. Eine weiterer Sonderfall wäre eine S-Matrix, die bei konstantem technischen Niveau ein gleichgewichtiges Wachstum g (in in diesem Fall gleich der Profitrate r) erlauben würde. Dieses Wachstum benötigt aber ein spezielles Preis- und Mengensystem, das den Links- bzw. Rechts-Eigenvektoren der Matrix (A+C) entsprechen würde, die einen Eigenwert in der Höhe von 1/(1+r) besitzt. Die Matrix S hätte dann die einfache

Gestalt g(A + C). An einem Beispiel mit 5 Sektoren der österreichischen I-O Matrix ergäben sich folgende Veränderungen für die BPWs bzw. Preisvektoren:

	Brutto-Produktion		relativer Preis	
	BPW 2003	x=(A+C+S)x	p = 1	p=p(A+C+S)
Land- u. Forstwirtschaft	7066	11660	1	0,830
Energieintensive Industrie	28561	50047	1	1,208
sonstige Industrie	85276	79840	1	1,166
Energieversorgung	14548	27069	1	1,470
Dienstleistungen	265281	225329	1	0,877

Die gleichgewichtige Wachstumsrate läge dann bei der (stolzen) Höhe von 36,7 Prozent. Natürlich sind grobe Vernachlässigungen und Vereinfachungen dafür verantwortlich, z.B. wird von der Existenz eines fixen Kapitalanteils abgesehen. Das ganze Mehrprodukt wird investiert. Die Kapitalisten konsumieren nichts etc.

In der Folge soll näher auf die Identifikation der Wertstruktur auf der empirischen Grundlage einer modernen Input-Output Tafel eingegangen werden. Es ist nämlich nicht trivial, herauszufinden, wie Wertproduktion in dieser Tafel identifiziert werden kann. Es ist ja notwendig, das inländische vom ausländischen Güteraufkommen zu unterscheiden, aber auch die inländische Wertproduktion von den zu Arbeitswerten bepreisten Importen, die für eine Bruttoproduktionswertsbestimmung von der inländischen Produktion abgezogen werden. Meiner Meinung nach hilft ein simpler Trick, durch den die damit verbundene Denkarbeit erleichtert werden kann: Man könnte sich das Aufkommen der einzelnen Wirtschaftszweige/Gütergruppen in einem symmetrischen Input-Ouput Modell als Berge von Gütern vorstellen (bei Dienstleistungen genügen die Güter, die zur Produktion von Diensten nötig sind). Diese Güterberge sind in Matrixform unterteilt, sodass in den Zeilen der jeweiligen Matrix die erzeugten Güter der jeweiligen Gütergruppe (bzw. die Aktivitäten des jeweiligen Sektors) zu liegen kommen, die so auf die Spalten verteilt sind, wie sie von den einzelnen Gütergruppen (bzw. Sektoren) verwendet werden. Dabei wende ich dieses Prinzip nicht nur auf Vorleistungen an, sondern auch auf Konsum, Investitionen und Importe. Die Exporte braucht man nicht weiter zu unterteilen, da genügt ein (Spalten-) Vektor, der die exportierten Güter (Aktivitäten) einer Gütergruppe (Sektors) enthält. Als eine Möglichkeit der Zuteilung des Konsums und der Investitionen zu den einzelnen Spalten (die ja in der I-O Tafel nicht explizit ausgewiesen ist) wähle ich die proportionale Aufteilung nach den zugehörigen Zeilen der Wertschöpfungsmatrix, also teile ich den Konsum z.B. proportional den Löhnen, und die Investitionen z.B. proportional zum Betriebsüberschuss auf. Ähnliches mache ich für die Endnachfrage bei Importen (die Vorleistungen sind ja schon explizit zugeteilt). Die Input-Output Tafel lässt sich dann in eine Reihe von (quadratischen) Matrizen zerlegen, deren Summe das gesamte Aufkommen ergibt.